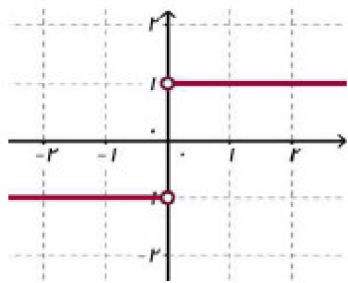


۱- اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

« پاسخ »



$$f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

« پاسخ »

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2(0) - 2 = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0)^2 + 2 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

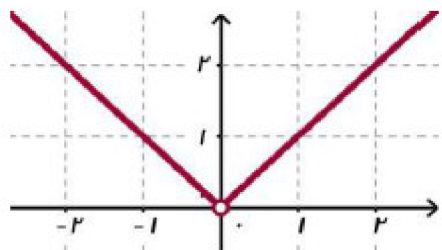
۳- آیا حد تابع مقابل در $x = 2$ موجود است؟

« پاسخ »

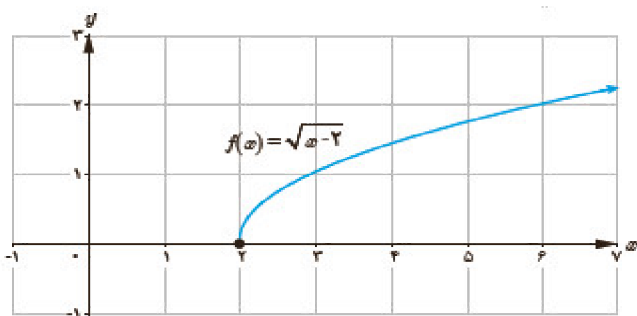
وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 3 = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0$

۴- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

« پاسخ »



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



۵- درباره‌ی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در

صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت) $f(2)$

« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \cdot = \cdot$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \cdot$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cdot$ وجود ندارد

ت) $f(2) = \sqrt{2-2} = \cdot$

۶- برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

« پاسخ »

الف) نادرست

پ) نادرست

ث) نادرست

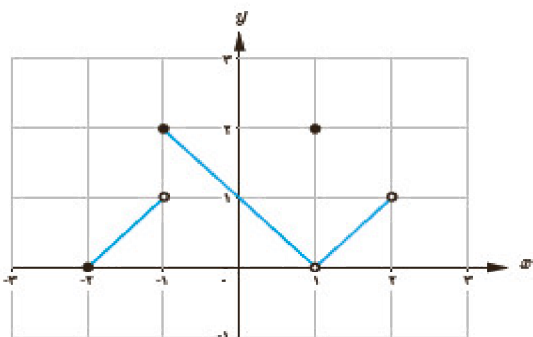
چ) درست

ب) درست

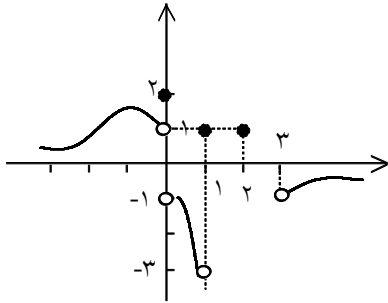
ت) درست

ج) درست

ح) درست



۷- با توجه به شکل مقابل حاصل موارد زیر را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

(حد راست و چپ متفاوت است) حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

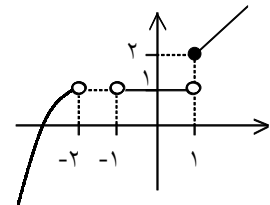
۸- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.

A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

D) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



« پاسخ »

A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

حد ندارد

D) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ وجود ندارد

۹- آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در $x = 0$ حد دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \quad (0/25)$$

خیر با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ ۰ تعریف نشده پس در $x = 0$ حد ندارد. (۰/۵)

۱۰- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a[x] + [x + 1]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است.

([] نماد جزء صحیح است.)

« پاسخ »

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود است یعنی حد چپ و راست تابع در $x = 1$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x + 1]) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x] + [x + 1]) = 0 + 1 = 1$$

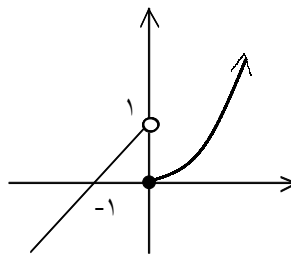
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

۱۱- ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، وجود حد تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ حد ندارد}$$



۱۲- برای تابع $f(x) = x + [x]$:

الف) نمودار تابع در بازه $x \in [-1, 1]$ را رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)							

ج) آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟ چرا؟

« پاسخ »

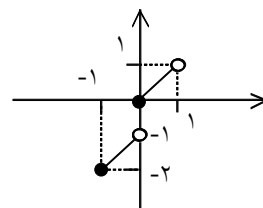
الف)

$$-1 \leq x < 0, \quad [x] = -1 \rightarrow y = x - 1$$

x	-1	۰
f(x)	-2	-1

$$0 \leq x < 1, \quad [x] = 0 \rightarrow y = x$$

x	۰	۱
f(x)	۰	۱



x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱

ب)

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ آن برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ حد ندارد}$$

۱۳- در تابع $f(x) = (-1)^{[x]}$:
 الف) تابع را در بازه‌ی $x \in [0, 2)$ رسم کنید.
 ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ج) آیا حد تابع در $x = 1$ موجود است؟ چرا؟

« پاسخ »

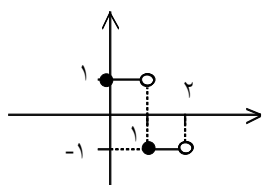
الف)

$$0 \leq x < 1 \xrightarrow{[x] = 0} y = (-1)^0 = 1$$

x	۰	۱
y	۱	۱

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{[x] = 1} y = (-1)^1 = -1$$

x	۱	۲
y	-۱	-۱



x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱

ب)

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ در $x = 1$ برابر نیست.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ موجود نیست}$$

۱۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 1-x & -2 \leq x < -1 \\ x & -1 < x \leq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)							

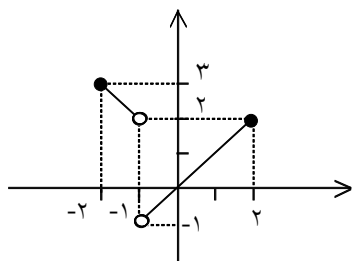
ج) آیا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

الف)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & -2 \leq x < -1 \\ x & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

x	-۲	-۱
y	۳	۲
x	-۱	۲
y	-۱	۲



ب)

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	تعریف نشده	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹

ج) حد ندارد - زیرا حد راست و چپ برابر نیست.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) \text{ موجود نیست}$$

۱۵- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 2$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x \geq 2 \\ \frac{ax}{x-3} & x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

برای آن که در $x = 2$ دارای حد باشد باید حد راست و چپ در $x = 2$ برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax}{x-3} = \frac{2a}{-1} = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 10 = -2a \Rightarrow a = -5$$

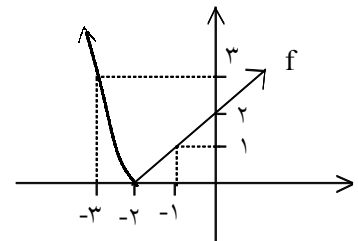
۱۶- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > -2 \\ x^2 + 2x & x \leq -2 \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x = -2$ به دست آورید. آیا تابع f در $x = -2$ حد دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > -2 \\ x^2 + 2x & x \leq -2 \end{cases}$$

x	-2	-1
y	0	1

x	-2	-3
y	0	3



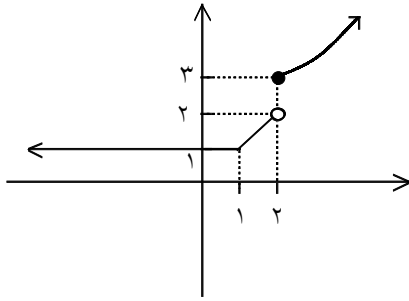
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow -2^-$$

تابع در $x = -2$ دارای حدی برابر صفر است. زیرا حد راست و چپ برابر صفر است.

۱۷- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 3f(2)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 3f(2) = 1 + 2 - 3(3) = -6$$

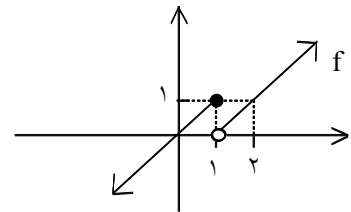
۱۸- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x = 1$ به دست آورید. آیا تابع f در $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۰	۱

x	۱	۰
y	۱	۰



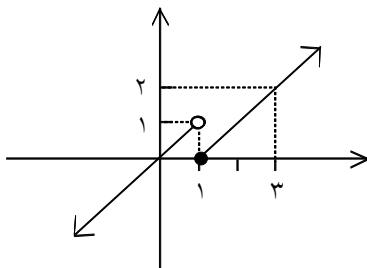
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{حد ندارد}$$

$$x \rightarrow 1^-$$

تابع در $x = 1$ حد ندارد، زیرا حد راست و چپ در $x = 1$ برابر نیست.

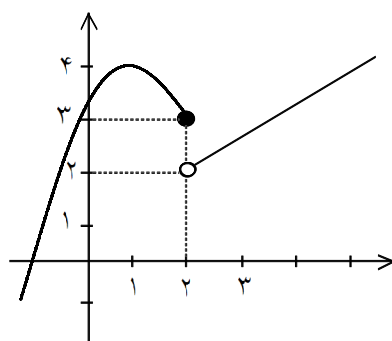
۱۹- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(3)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(3) = 0 - 1 + 2 = 1$$



۲۰- با استفاده از نمودار زیر حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ (۰/۲۵)

ج) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (۰/۲۵)

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ (۰/۲۵)

۲۱- مقادیر a و b را در $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq -1 \\ ax^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$ طوری تعیین نمایید که $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ گردد.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) \quad (۰/۲۵) = a(-1) + b = -a + b \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 - 1) \quad (۰/۲۵) = a(-1)^2 - 1 = a - 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

۲۲- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ بررسی کنید.

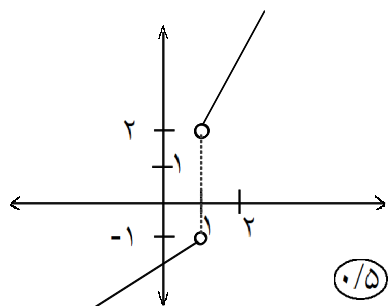
$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\text{حد چپ} = -1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{حد راست} = 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$-1 \neq 2 \quad (۰/۲۵) \text{ : حد وجود ندارد.}$$



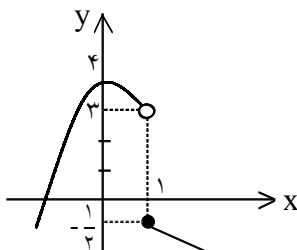
(۰/۵)

۲۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنید.

« پاسخ »

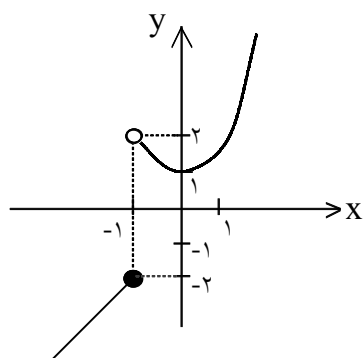
رسم خط (۰/۲۵)

رسم سهمی (۰/۷۵)



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 3 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ حد ندارد} \quad (۰/۲۵)$$

۲۴- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ه) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$x \rightarrow -1$

« پاسخ »

الف) ۲ (۰/۲۵)

ب) -۲ (۰/۲۵)

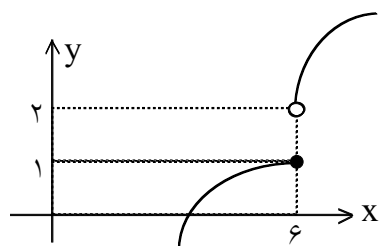
ج) ۱ (۰/۲۵)

د) حد ندارد (۰/۲۵)

۲۵- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2 & x < -1 \\ 2ax^2 & x > -1 \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع در $x = -1$ حد داشته باشد.

« پاسخ »

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^3 - 2) = -a - 2 \quad (۰/۵) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2ax^2) = 2a \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a = -a - 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \quad (۰/۲۵)$$



۲۶- با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

« پاسخ »

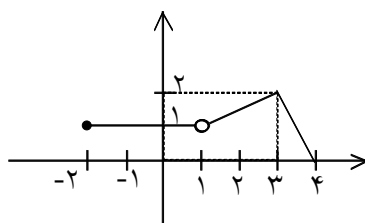
الف) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ وجود ندارد

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$

۲۷- با توجه به نمودار داده شده به سؤال روبرو پاسخ دهید.



« پاسخ »

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1$

۲۸- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم نموده و حدود زیر را حساب کنید. (در صورت وجود)

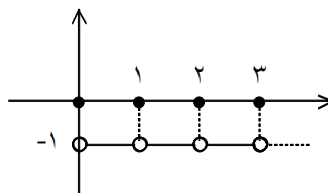
الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

۲۹- حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$x \rightarrow 2$

« پاسخ »

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{2 \log\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x}}{2 \left(\log_2^x - \log_2^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\log_2^x\right)^2 - 1}{2 \log_2^x \left(\log_2^x - 1\right)}$$

$x \rightarrow 2$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{\left(\log_2^x - 1\right)} \left(\log_2^x + 1\right)}{2 \log_2^x \cancel{\left(\log_2^x - 1\right)}} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$x \rightarrow 2$

روش دوم (هوبیتال):

$$\log_2^x = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{2(t-1)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

۳۰- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)}}_{0/25} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})}}_{0/25} = \underbrace{\frac{+1}{6}}_{0/25}$$

۳۱- در هریک از حالت‌های زیر درباره‌ی حد تابع $f + g$ چه می‌توان گفت؟
 الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.
 ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

« پاسخ »

الف) حد $f + g$ تابع وجود ندارد.
 ب) حد $f + g$ تابع وجود ندارد.

۳۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$	ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$
پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$	ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$
ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$	ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)}$

« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3 + 0 = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \right)^5 = (-1)^5 = -1$

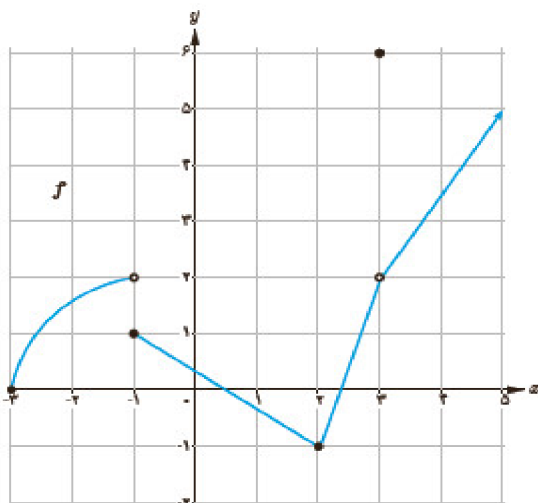
پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{0}{3} = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 5\lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{3\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 5\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}$
 $= \frac{3 \times 3}{0 - 5(-1)} = \frac{9}{5}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{1}{-1} = -1$

۳۳- با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



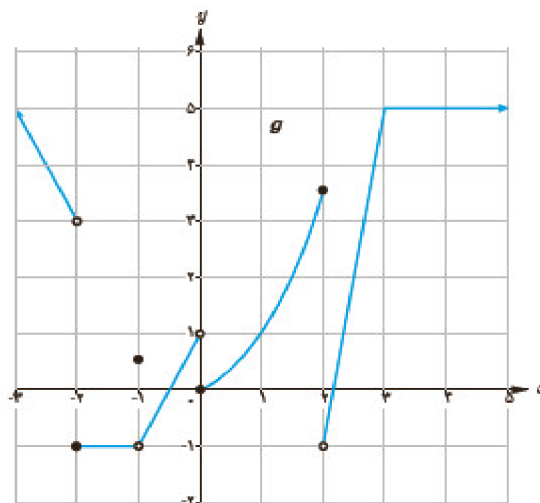
ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

« پاسخ »

ب) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

ج) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

ح) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$

ث) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

خ) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

۳۴- حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$x \rightarrow 3$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)}{(x - 1)} = -1 \quad \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x}{x + 3} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 3$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار مقادیر زیر را حساب کنید.

$$h(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

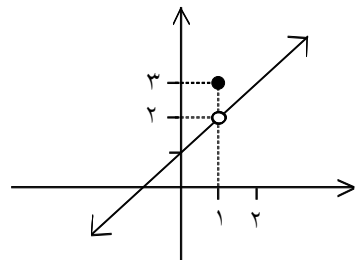
$$x \rightarrow 1$$

« پاسخ »

الف)

$$x \neq 1 \Rightarrow h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} \Rightarrow h(x) = x + 1$$

x	1	2
y	2	3



$$h(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1$$

ب)

۳۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x + 2| - |4x - 1|}{x^2 - 1}$

« پاسخ »
(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = -3 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} = \text{حد ندارد}$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

۳۷- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^3 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x + 5| - |8x - 1|}{x^2 - 1}$

« پاسخ »

الف) بهتر است برای تعیین علامت $x^2 - 4x + 3$ در همسایگی $x = 1$ از جدول تعیین علامت استفاده کنیم.

	1^-	1^+	3	
x				
$x^2 - 4x + 3$	+	-	-	+

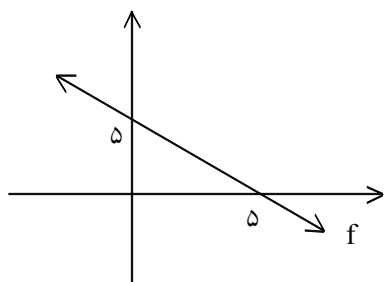
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-2}{3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^3 - 1} = \text{حد ندارد}$$

$x \rightarrow 1$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5 - (8x - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-6}{2} = -3$$



۳۸- شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

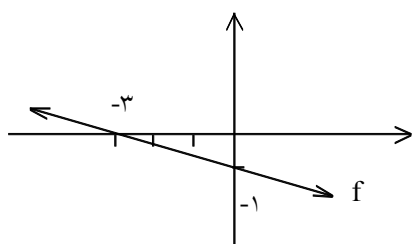
f یک تابع خطی گذرنده از $A(0, 5)$ و $B(5, 0)$ است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 5) \Rightarrow a(0) + b = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$B(5, 0) \Rightarrow a(5) + b = 0 \xrightarrow{b=5} a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{-(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{-1} = -5$$



۳۹- شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x)}{x^3 + 1}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

f یک تابع خطی گذرنده از $A(0, -1)$ و $B(-3, 0)$ است.

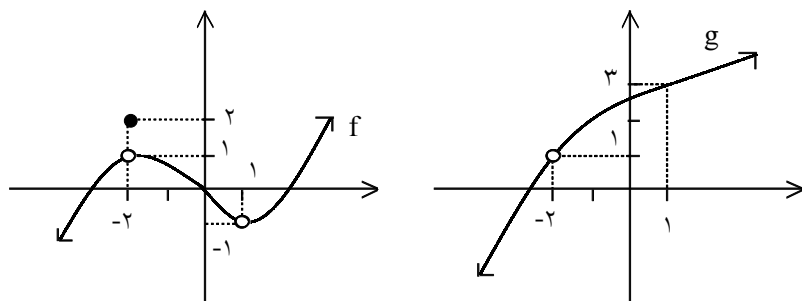
$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(-3, 0) \Rightarrow a(-3) + b = 0 \xrightarrow{b=-1} -3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 1 \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{3}x \xrightarrow{\times(-3)} -3y - 3 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -3x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -3x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3}{x^2 - x + 1} = \frac{-3}{1 + 1 + 1} = -1$$



۴۰- نمودار توابع f و g به صورت زیر است:
حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - 3g(x))$

« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x)) = 2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2(-1) - 3 = -5$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - 3g(x)) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) - 3\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 1 - 3(1) = -2$

۴۱- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x])$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x + 7}{\sqrt{x + 1}}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

« پاسخ »

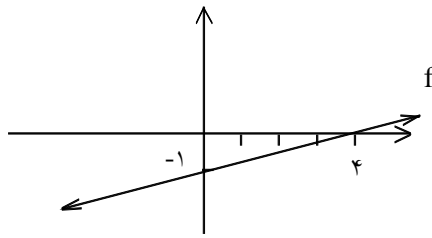
الف) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x + 7}{\sqrt{x + 1}} = \frac{8 + 7}{\sqrt{8 + 1}} = \frac{15}{3} = 5$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x]) = 2 + 2 = 4$

ج) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-1} = \frac{8}{3}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x + \sin^2 x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$
 $= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$

۴۲- اگر نمودار تابع خطی $f(x)$ به صورت زیر باشد،



$\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) - f^{-1}(x))$ را حساب کنید.

« پاسخ »

f یک تابع خطی است. بنابراین داریم:

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(4, 0) \Rightarrow a(4) + b = 0 \xrightarrow{b = -1} 4a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x - 1$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{4}x \xrightarrow{\times 4} 4y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = 4x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) - f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 8} f(x) - \lim_{x \rightarrow 8} f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{4}(8) - 1 \right) - (32 + 4) = 1 - 36 = -35$$

۴۳- اگر $f(x) = (2x^2 + ax + b)[x]$ در $x = 7$ و $x = -3$ دارای حد باشد، a, b را حساب کنید. [] نماد جزء صحیح است

« پاسخ »

باید معادله $2x^2 + ax + b = 0$ به ازای $x = 7$ و $x = -3$ صفر شود. بنابراین:

$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \\ x = 7 \Rightarrow x - 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times} (x + 3)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 8x - 42 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -42 \end{cases}$$

۴۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}} 2 \sin x + 1$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}} 2 \sin x + 1 &= 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1 = 2 \times \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \text{حد چپ ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \text{حد ندارد}$$

۴۵- اگر $f(x) = (3x^2 - ax + 2b - 1)[x]$ در $x = 1$ و $x = 5$ دارای حد باشد، a و b را حساب کنید.

« پاسخ »

باید معادله $3x^2 - ax + 2b - 1 = 0$ به ازای $x = 7$ و $x = -3$ صفر شود بنابراین:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \\ x = 5 \Rightarrow x - 5 = 0 \end{cases} &\xrightarrow{\times} (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 18x + 15 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} -a = -18 \Rightarrow a = 18 \\ 2b - 1 = 15 \Rightarrow b = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

۴۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3} &\times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x+8-9)(\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}} &\times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} \times 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+5-8)(x + \sqrt{x+6})}{(x^2 - x - 6)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x + \sqrt{x+6})}{x-3(x+2)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} = \frac{6}{5 \times 12} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

۴۷- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} &\times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} &\times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+3) \left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3) \left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4 \right)} = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72} \end{aligned}$$

۴۸- حد تابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \textcircled{0/25}}{(x-3)(x+3) \left(\sqrt{x+1} + 2 \right) \textcircled{0/25}} = \frac{1}{24} \textcircled{0/25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5}$$

۴۹- حد زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \therefore \rightarrow \text{رفع ابهام} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\overbrace{5-x}^{5-x+1}}{(x-5)(x-1)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(x-1)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4 \times 4} = \frac{-1}{16} \end{aligned}$$

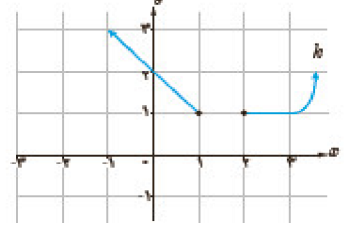
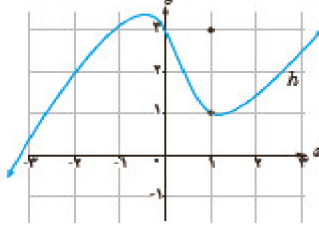
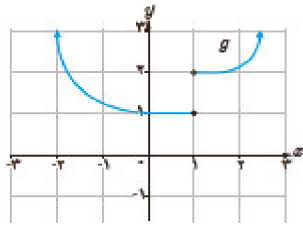
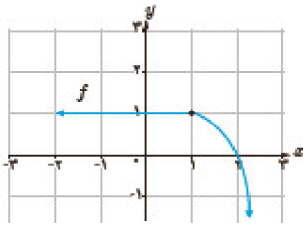
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt[3]{28-x}}{x^2 - 1}$$

۵۰- حاصل حد زیر را به دست آورید:

« پاسخ »

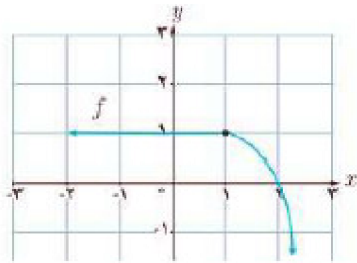
$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{28-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\sqrt[3]{27}}{2} = \frac{3}{2}$$

۵۱- کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟



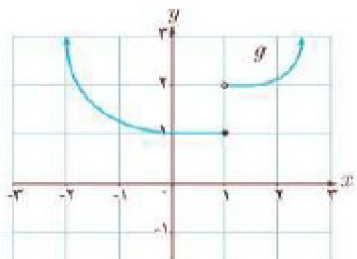
« پاسخ »

تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است زیرا:



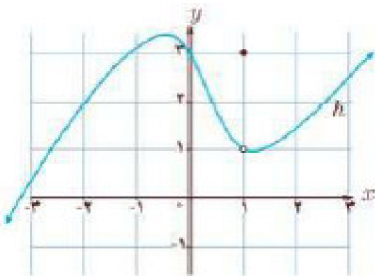
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

تابع $g(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا:



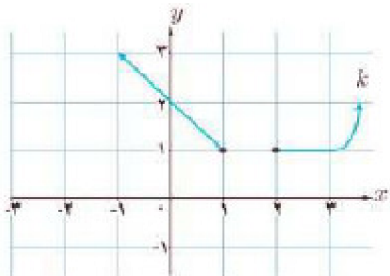
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

تابع $h(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$$

تابع $k(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) \text{ وجود ندارد } , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 1$$

۵۲- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & x \leq 0 \\ x^2+2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

« پاسخ »

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0)^2 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0) + 2 = 2 \\ f(0) &= -2(0) + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است زیرا:

۵۳- مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & x \neq 1 \\ a+2 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ f(1) &= a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2 \Rightarrow a + 2 = -2 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

۵۴- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2b}{x^2-2} & ; x > 2 \\ 2a+x+1 & ; x = 2 \\ 2b+5 & ; x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$f(2) = 2a + 2 + 1 = 2a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2b}{x^2-2} = \frac{2+2b}{2} = b+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b+5$$

$$2a+3 = b+1 = 2b+5 \Rightarrow b+1 = 2b+5 \Rightarrow b = -4$$

$$2a+3 = 2b+5 \Rightarrow 2a+3 = -3 \Rightarrow a = -3$$

۵۵- در تابع زیر a را طوری تعیین کنید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد. ($[]$ نماد جزء صحیح است).

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

« پاسخ »

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

$$k(1) = (1 - a)[1] = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = 0$$

$$\text{چون } k(1) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} k(x) \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

۵۶- اگر تابع f با ضابطه‌ی زیر در $x = 2$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + ax & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ b[x] - 3 & x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$x = 2 \text{ در } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \text{ شرط پیوستگی}$$

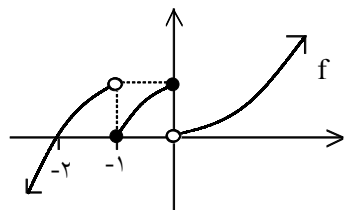
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + ax = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} + ax = 4 + 2a$$

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} b[x] - 3 = b - 3$$

$$b - 3 = 3 \Rightarrow b = 6$$

$$4 + 2a = 3 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$



۵۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟ چرا؟

الف) f در بازه $[0, +\infty)$ پیوسته است.

ب) f در بازه $[-1, 0]$ پیوسته است.

« پاسخ »

الف) نادرست است. زیرا f در $x = 0$ پیوستگی راست ندارد.

ب) درست است. زیرا f در بازه‌ی $(-1, 0)$ پیوسته و در $x = -1$ پیوستگی راست و $x = 0$ پیوستگی چپ دارد.

۵۸- در تابع مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a|x| + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 2ax + 2 & x > 1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2ax + 2 &= 1 + 2a + 2 = 3 + 2a = f(1) \quad (0/5) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} a|x| + 1 &= a + 1 \quad (0/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 + 2a = a + 1 \Rightarrow a = -2 \quad (0/25)$$

۵۹- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}}_{(0.25)} \quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}}_{(0.25)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \quad (0.25) \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (0.25)$$

۶۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x_0 = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ a + 1 & x = 0 \\ [x + 2] + b & x < 0 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2 \quad (0.5)$$

$$f(0) = a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x + 2] + b = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + 2 + b = -1 + 2 + b = 2 \Rightarrow b = 1 \quad (0.25)$$

(0.25)