

نام و یاد خدا

کاربرد مشتق

۱) تابع $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ درجه بازه‌ای اکیدا صعودی و درجه بازه‌ای اکیدا نزولی است ؟

۲) نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید :

الف) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$

ب) $f(x) = x^3 - 3x$

پ) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

(۳) اگر نقطه $(-۱, ۲)$ آکترمی نبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + ۱$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید.

(۴) به کمک رسم نمودار، آکترمی درونی توابع زیر را مشخص کنید.

(الف)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \geq 0 \\ x + 4 & x < 0 \end{cases}$$

(ب)
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(۵) آکترمی در مطلق تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + ۱$ را در بازه $[-۲, ۲]$ مشخص کنید.

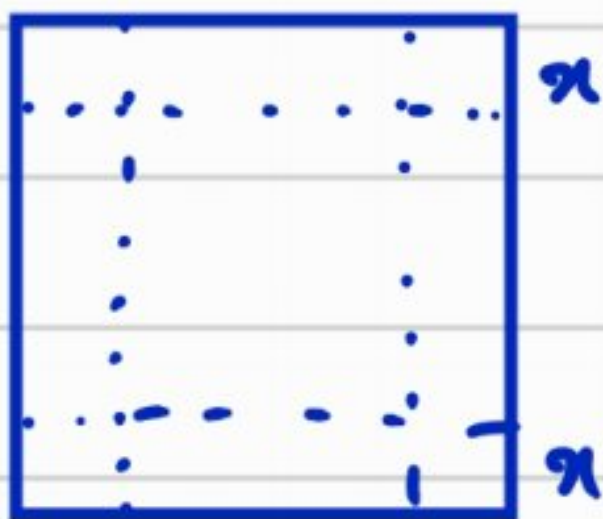
(۶) نقاط Max و min مطلق تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را در بازه $[-۳, -۱]$ تعیین کنید.

(۷) باریم نمودار تابع $f(n) = \begin{cases} n^2 - 2n & 0 \leq n \leq 3 \\ 2n - 3 & -2 \leq n < 0 \end{cases}$ مقادیر اکثرم مطلق تابع را در صورت وجود بدست آورید.

(۸) از بین تمام مستطیل‌های با محیط ۱۸ سانتی‌متر، مستطیل با سبب‌ترین مقدار مساحت را مشخص کنید.

(۹) اگر x و y دو عدد حقیقی و $3x - 4y = 12$ باشد x و y را طوری بیابید که xy کمترین مقدار را داشته باشد.

(۱۰) ورق فلزی مربع شکل با طول ضلع ۲۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچک‌تری به ضلع x برش زنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم و یک جعبه در برابریم. مقدار x حقیقی باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟

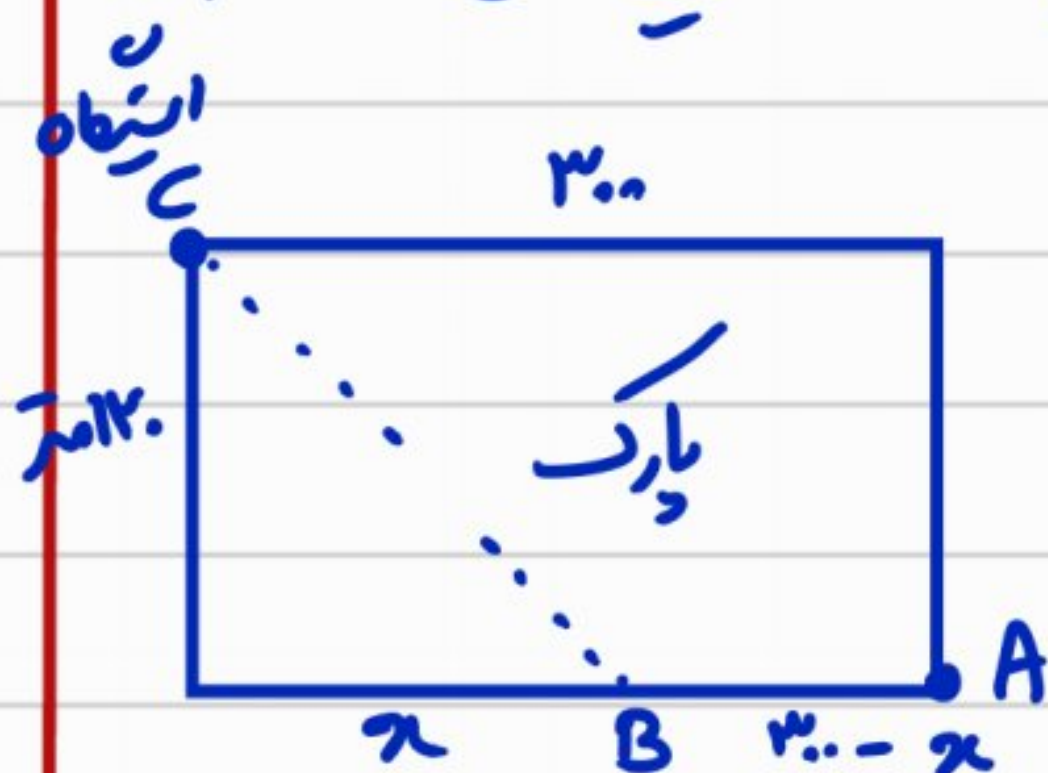


۱۱) در شکل مقابل شخصی در نقطه A قرار دارد او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد این شخص

می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه A به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک

و با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند مقدار x کدام باشد تا این شخص بدترین زمان ممکن به

ایستگاه برسد.



کاربرد مشتق

تابع $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ درم بازه‌ای ابتدا صعودی و درم بازه‌ای ابتدا نزولی است؟
 (ا.د.) $y' < 0$ (ص.د.ا) $y' > 0$

برای $\sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1}} = 0$
 مشتق منفی سمت چپ برای $x < 1$ و مثبت برای $x > 1$

نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید:

نقاط مشتق منفی و مثبت
 دیتا مارشک
 دیتا مارشک
 دیتا مارشک
 دیتا مارشک

$-x^2 + 4x \geq 0$

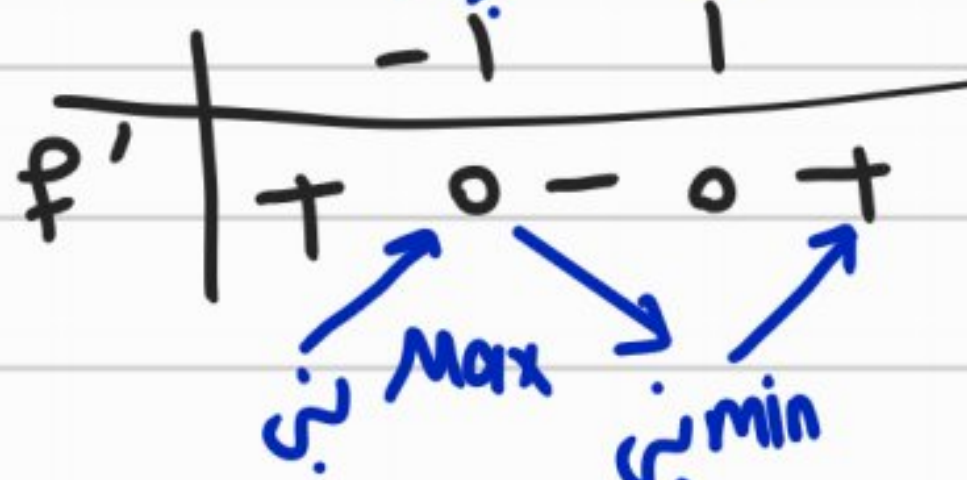
$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ $D_f: [0, 4]$

برای $x_1 = 0$ و $x_2 = 4$

$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}} = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

ب) $f(x) = x^3 - 3x$

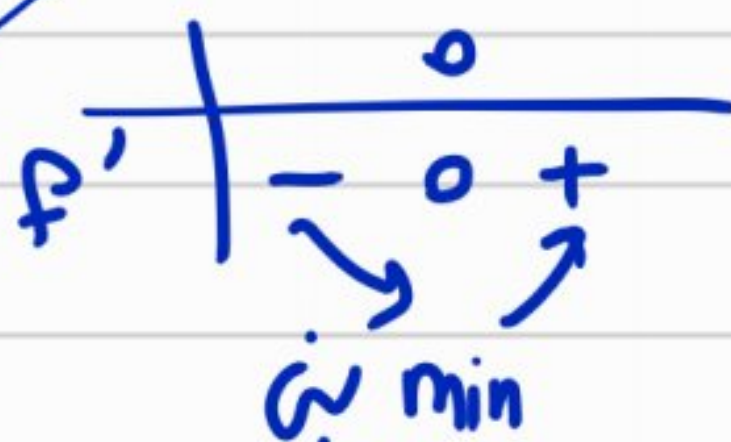
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$



ج) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$

$3x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 1}} \times 6x = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$



۳) اگر نقطه $(-1, 2)$ از مرتبه تابع $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید.

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow P'(-1) = 0 \rightarrow -2a + b = -3$$

$$P(-1) = 2 \rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \rightarrow -1 + a - b + 1 = 2 \rightarrow a - b = 2$$

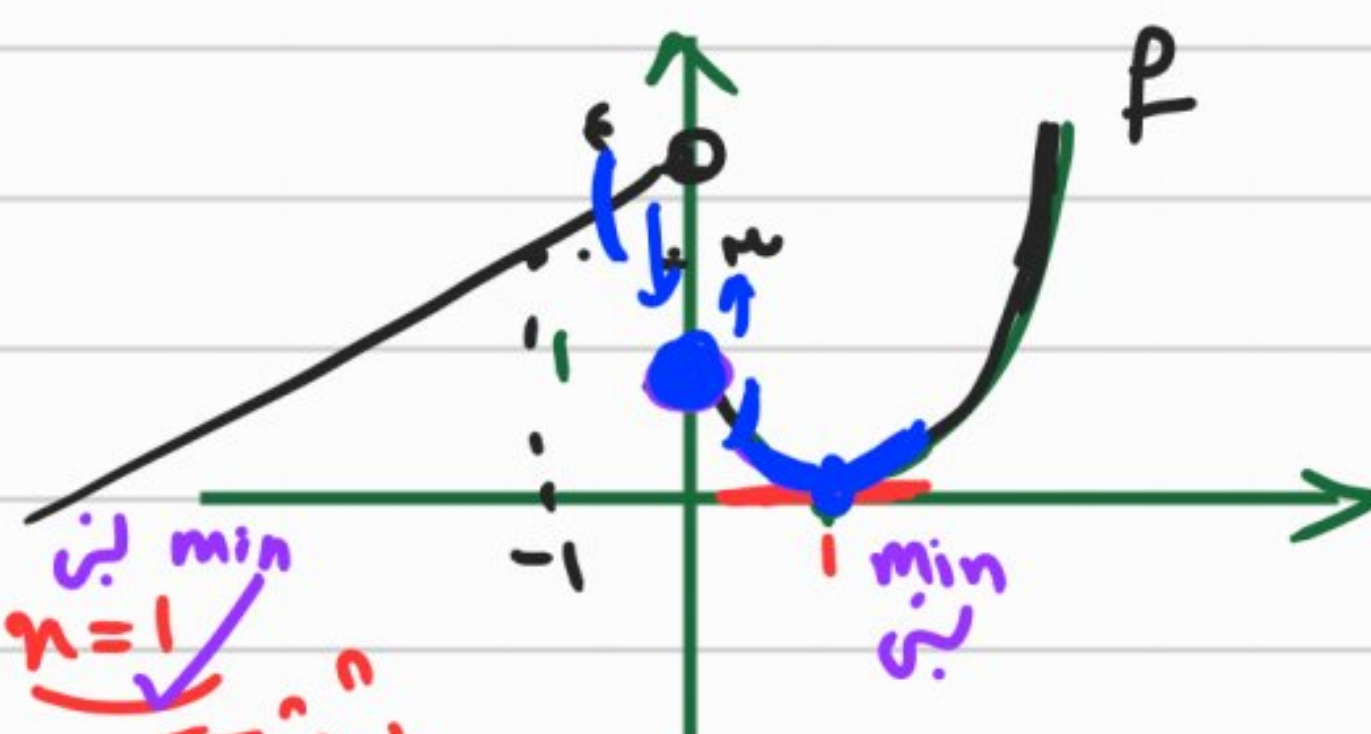
$$\begin{cases} -2a + b = -3 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$-a = -1 \rightarrow a = 1$$

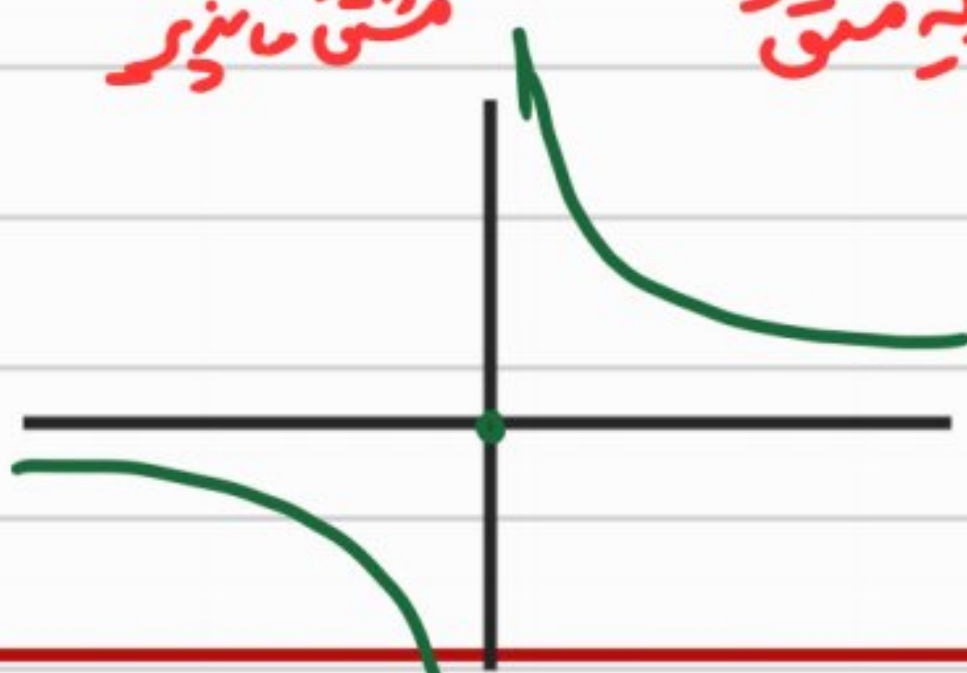
$$a - b = 2 \rightarrow 1 - b = 2 \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$$

۴) به کمک رسم نمودار، از مرتبه تابع زیر را مشخص کنید.

الف) $P(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \geq 0 \\ x + 4 & x < 0 \end{cases}$



ب) $f(x) = \frac{1}{x}$



جوابی
مشتق ناموجود
P(x) بی اندازه

۵) از مرتبه مطلق تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ را در بازه $[-2, 2]$ مشخص کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{8}{27} + 1 = \frac{35}{27}$$

$$f(-2) = 16 - 8 + 1 = 9 \rightarrow \text{max}$$

۱) نقاط بحرانی
۲) سر و ته بازه
۳) مقدار تابع را در a و b قرار بدهیم
۴) f را رسم می کنیم

۶) نقاط Max و min مطلق تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را در بازه $[-3, -1]$ تعیین کنید.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{4}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$f(-3) = -3 - \frac{4}{3} = -\frac{13}{3} \approx -4.33 \quad f(2) = 2 + 2 = 4 \rightarrow \text{max}$$

$$f(-1) = -1 - 4 = -5 \rightarrow \text{min} \quad f(-2) = -2 - 2 = -4$$

(۷) بارم خود را تابع $f(n) = \begin{cases} +n^2 - 2n & 0 \leq n \leq 3 \\ 2n - 3 & -2 \leq n < 0 \end{cases}$ مقدار اکترم مطلق تابع را در صورت وجود بدست آورید:

مقدار مطلق: $3, -2$ مطلق: $3, -2$

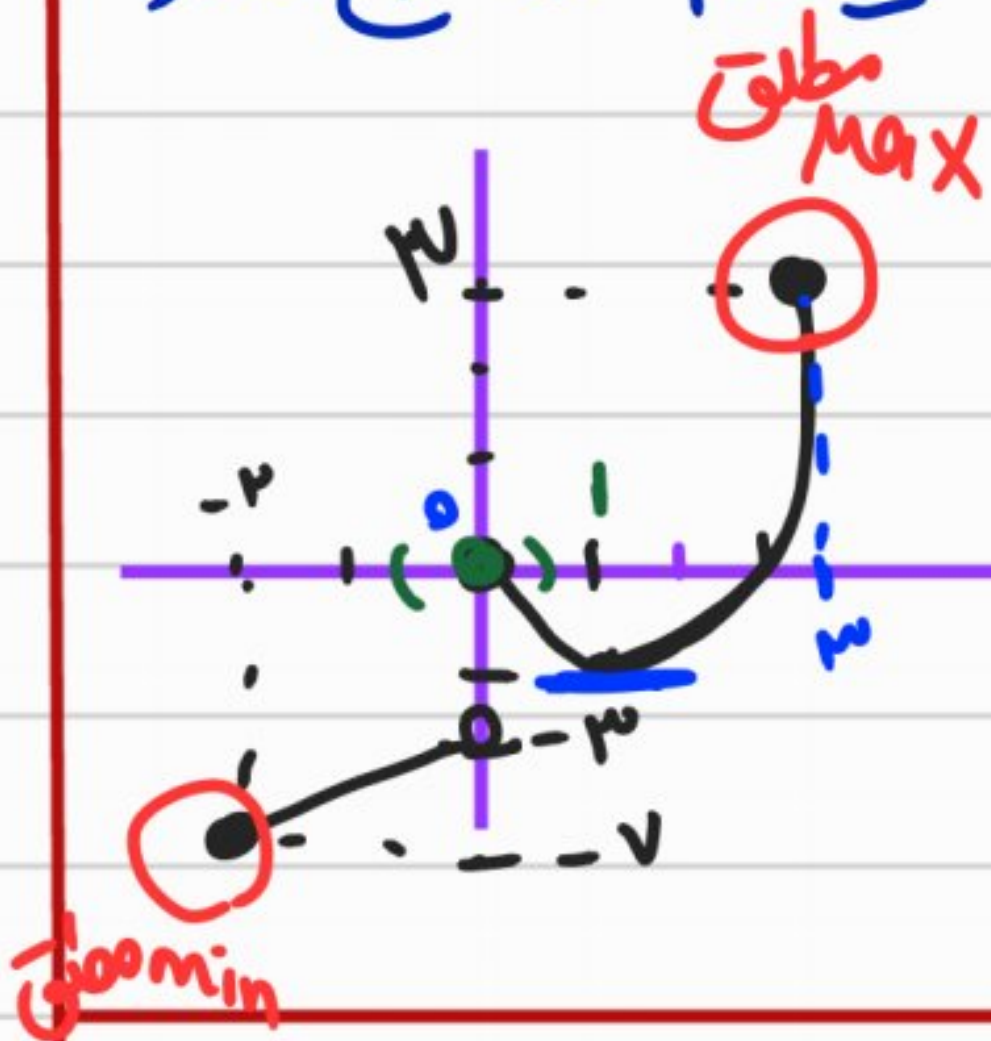
مقدار مطلق: $3, -2$ و 0 مطلق: $3, -2$

Ext V: Max

Ext V

min

نسبت دلفندر



(۸) از بین تمام مستطیل های با محیط ۱۸ سانتی متر، مستطیل با بیشترین مقدار مساحت را مشخص کنید:

طول: x

عرض: y

$$S = 2(x+y)$$

$$x = \frac{1}{2}(x+y)$$

$$x+y=9$$

$$y=9-x$$

$$S = x \times y$$

$$S = x(9-x) = -x^2 + 9x \Rightarrow S\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4}$$

$$S'(x) = -2x + 9 = 0 \Rightarrow -2x = -9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

(۹) اگر x و y دو عدد حقیقی و $3x - 4y = 12$ باشد، x و y را طوری بیابید که xy کمترین مقدار را داشته باشد.

$$-4y = -3x + 12$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$y = \frac{3}{4}(x) - 3 = \frac{3x}{4} - 3$$

$$S(x) = x \times y$$

$$S(x) = x\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

$$S'(x) = \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$$

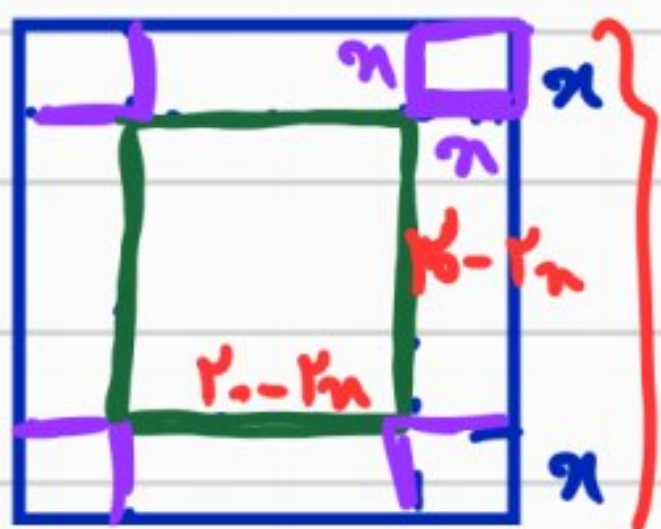
(۱۰) ورق فلزی مربع شکل با طول ضلع ۲۰ سانتی متر را در نظر بگیرید مطابق شکل می خواهم از چهار گوشه آن مربع را کوبی به ضلع x برش زنم و آن را کنار بگذارم و یک جعبه در برابرم.

$$V(x) = S_{\text{مقدار}} \times h$$

مقدار x حقیقی باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟

$$V(x) = (20-x)^2 \times x \rightarrow V(x) = (400 - 40x + x^2) \times x$$

$$V(x) = 400x - 40x^2 + x^3$$



$$v'(x) = f_0 - 14x + 12x^2 = 0$$

$$(3)x^2 - 4x + 10 = 0$$

$$\Delta = 1400 - 4(3)(100) = 1400 - 1200 = 200$$

$$x = \frac{f_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times 3} \rightarrow x = \frac{f_0 + \sqrt{200}}{6} = \frac{10 + 10\sqrt{2}}{6} = \frac{5(1+\sqrt{2})}{3}$$

$$x = \frac{f_0 - \sqrt{200}}{6} = \frac{10 - 10\sqrt{2}}{6} = \frac{5(1-\sqrt{2})}{3}$$

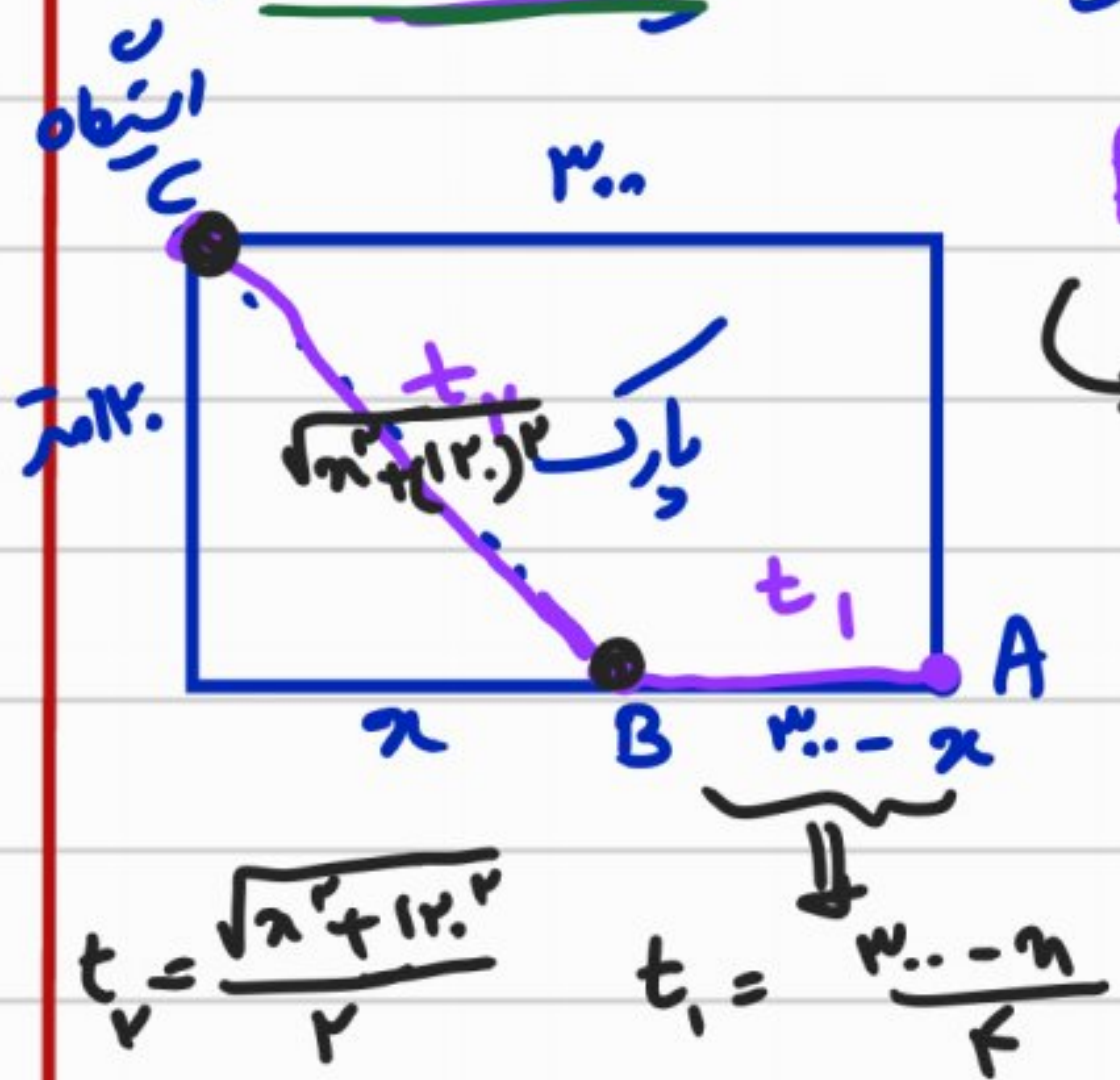
(11) در شکل مقابل شخصی در نقطه A قرار دارد او می خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد این شخص

می تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه A به سمت غرب برود و همچنین می تواند از درون پارک

و با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند مقدار x کدام باشد تا این شخص بدترین زمان ممکن به

$$x = v \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

ایستگاه برسد



$$f(t) = t_1 + t_v$$

$$f(x) = \frac{10-x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 12^2}}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \times 2 \sqrt{x^2 + 12^2}} \times 2x = 0$$

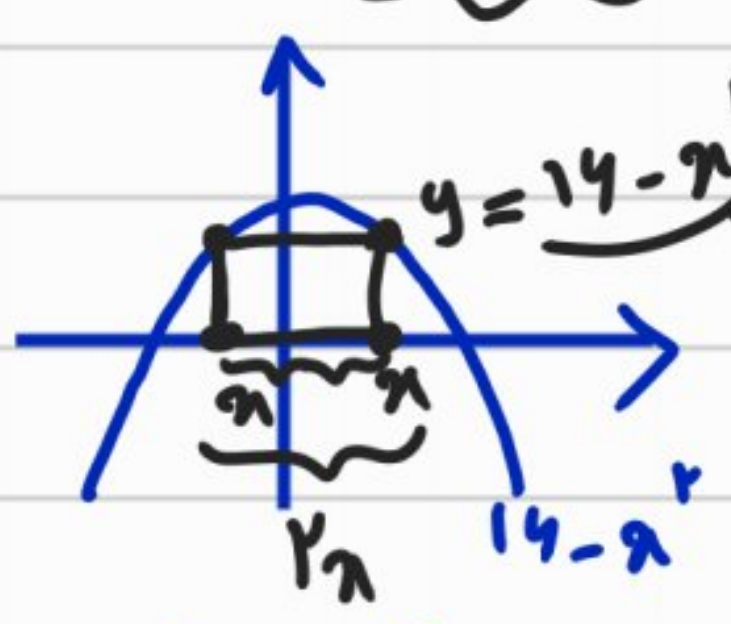
$$\frac{x}{2 \sqrt{x^2 + 12^2}} = \frac{1}{4}$$

$$(f(x))' = (\sqrt{x^2 + 12^2})'$$

$$\Rightarrow f(x)' = x' + 12^2 \rightarrow x' = 12^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\frac{12^2}{3}}$$

$$x = \frac{12^2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{144 \times \sqrt{3}}{3} = 48\sqrt{3}$$

(13) متغیر در xی $y = 14 - x^2$ مطابق شکل نقاط است مانده است متغیر را بدست آورید



$$S(x) = x \times y$$

$$S(x) = x(14 - x^2) = -x^3 + 14x$$

$$S'(x) = -3x^2 + 14 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{14}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$S\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right)^3 + 14 \times \left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4\sqrt{14}}{3\sqrt{3}} + \frac{98\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$$

$$S\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-4\sqrt{14} + 98\sqrt{14}}{3\sqrt{3}} = \frac{94\sqrt{14}}{3\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$$