



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری

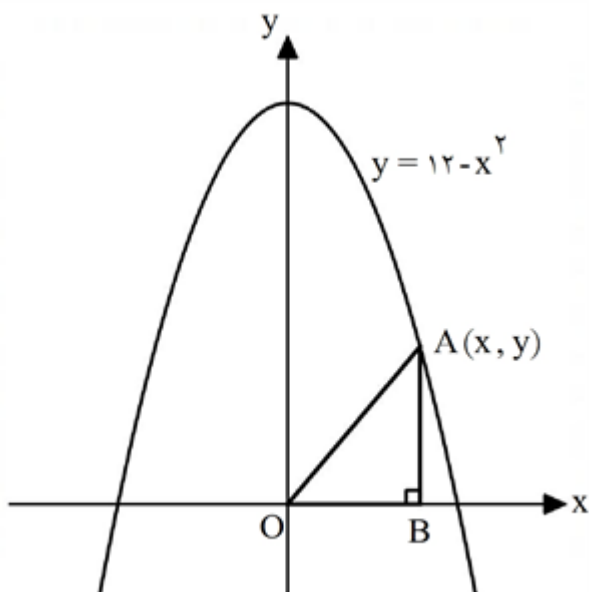
عنوان آزمون : ریاضی تجربی ۱۲- فصل ۵

بارم

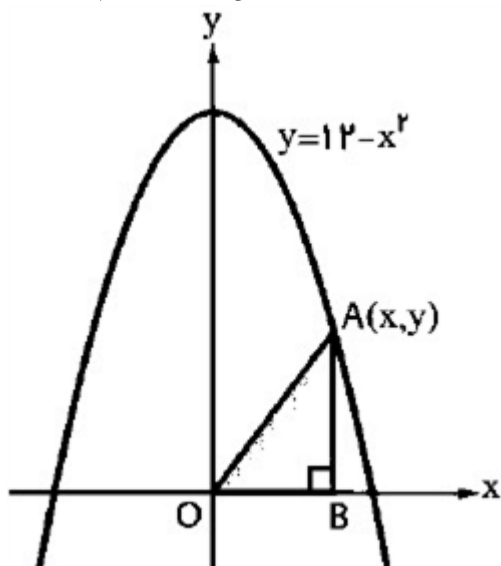
لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید

ردیف

مطابق شکل مقابل، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

$$\Rightarrow y = 12 - 4 = 8$$

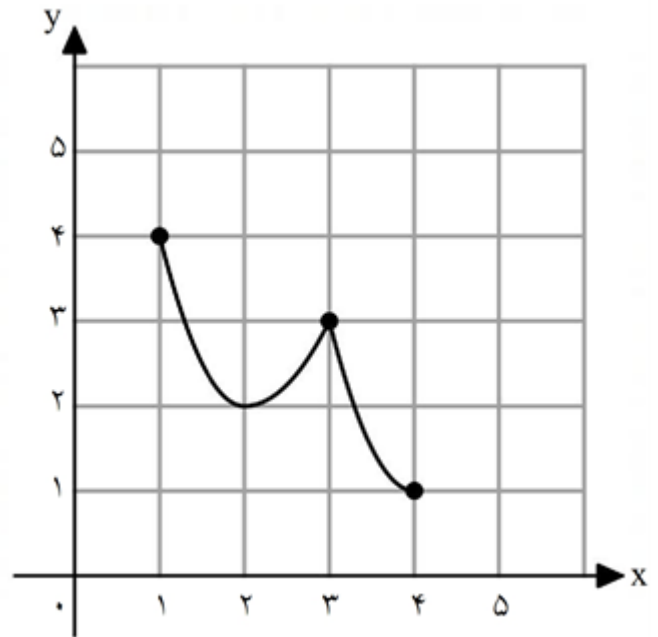
پاسخ: ۱

x	۰	۲	$\sqrt{12}$
$S'(x)$	+	-	
$S(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

۸



در نمودار زیر، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

طول ماکزیمم نسبی = ۳

طول ماکزیمم مطلق = ۱

طول مینیمم نسبی = ۲

طول مینیمم مطلق = ۴

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درواز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است.
ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$h = \frac{300}{r^2}$$

$$S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$

پاسخ: ۱

۴

مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

پاسخ: ۱

۵



مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

غ ق ق $y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$

$f(-2) = 32, f(0) = 0, f(3) = -27$

ماکزیمم مطلق $= 0$ مینیمم مطلق $= -32$

پاسخ: ۱

۶

با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

x		-3		3	
f'(x)	+	0	-	0	+

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ پاسخ: ۱

اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

۷

نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-16 Min	11 Max	

۸

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y$

$s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y$

$s' = 2y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$

پاسخ: ۱

۹



پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2}$$

پاسخ: ۱

$$S(r) = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \Rightarrow 6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi}$$

r	$\frac{6}{4 + \pi}$		
S'	+	○	-
S	↗ ↘		

$$h = \frac{6 - (2 + \pi)\frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi}$$

۱۰

اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غیرقابل قبول}$$

پاسخ: ۱

مینیمم مطلق $f(1) = -4$

$f(0) = 0$

ماکزیمم مطلق $f(2) = 22$

۱۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۱۲

بزرگترین بازه از R که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پاسخ: ۱

x	-1			1	
f'	-	○	+	○	-
f	↘ ↗ ↘				

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.

۱۳

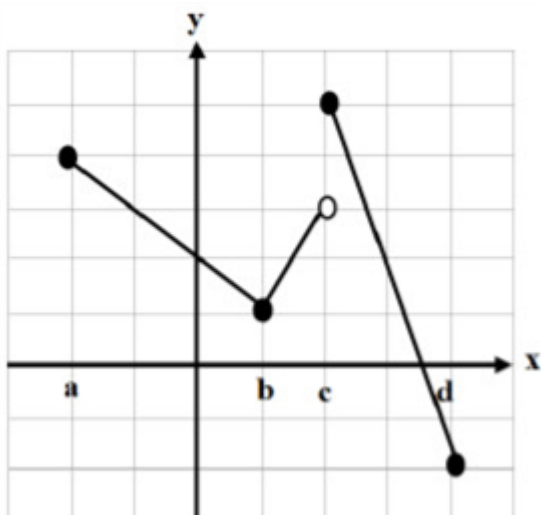
درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۱۴

در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱
d مینیمم مطلق
c ماکزیمم مطلق
c ماکزیمم نسبی
b مینیمم نسبی

۱۵

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

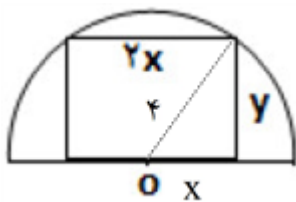
$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$

پاسخ: ۱

۱۶

یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

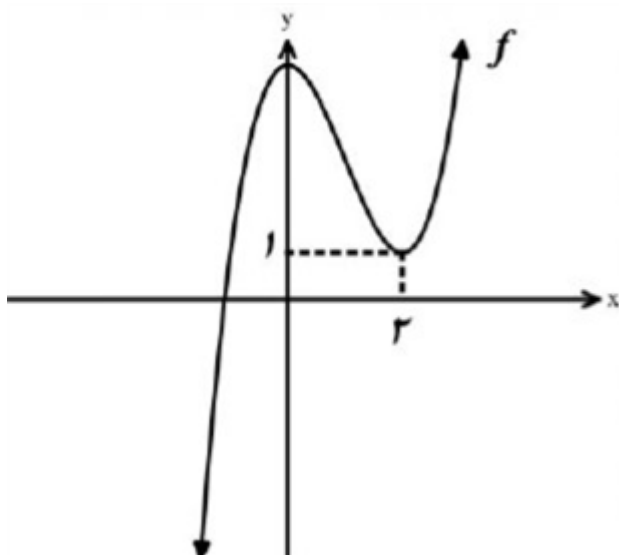
$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}, y = \sqrt{8}$$

پاسخ: ۱

۱۷

طول $2\sqrt{8}$ و عرض $\sqrt{8}$ است.

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



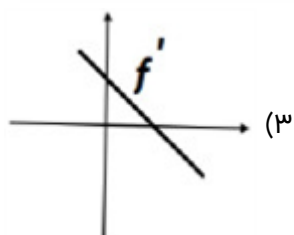
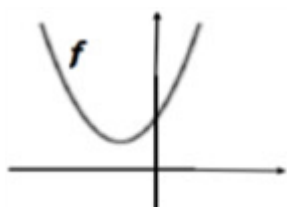
۱۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

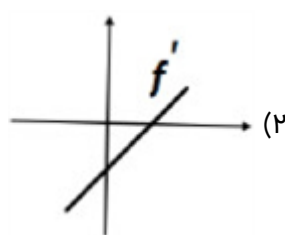
$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

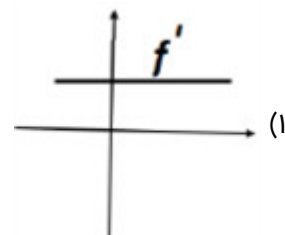
پاسخ: ۱



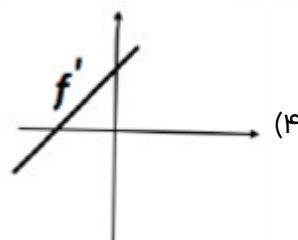
(۳)



(۲)



(۱)



(۴)

۱۹

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

پاسخ: ۱

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

۲۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.	پاسخ: ۱ درست											
۲۱	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی است؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ $f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, x = -2$ $(-\infty, -2), (2, +\infty) \text{ اکیداً صعودی}$ <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>f'</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td>↗</td><td>↘</td><td>↗</td></tr></table>	x	-2	2	f'	+	-	+	f	↗	↘	↗	پاسخ: ۱
x	-2	2											
f'	+	-	+										
f	↗	↘	↗										
۲۲	نشان دهید در بین مستطیلهایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ $y = 8 - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow S'(x) = -2x + 8 = 0$ $x = 4, y = 4$	پاسخ: ۱											
۲۳	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. - اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی											
۲۴	ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه (۱, ۲) اکسترمم نسبی تابع باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ $f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$ $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$	پاسخ: ۱											



اکستریمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

پاسخ: ۱

x	-1	3
f'	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$
	max	min
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$

۲۵

اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ای $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصلضرب این دو عدد مینیمم گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = -5$$

پاسخ: ۱

۲۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکستریمم نسبی تابع $f(x)$ است.

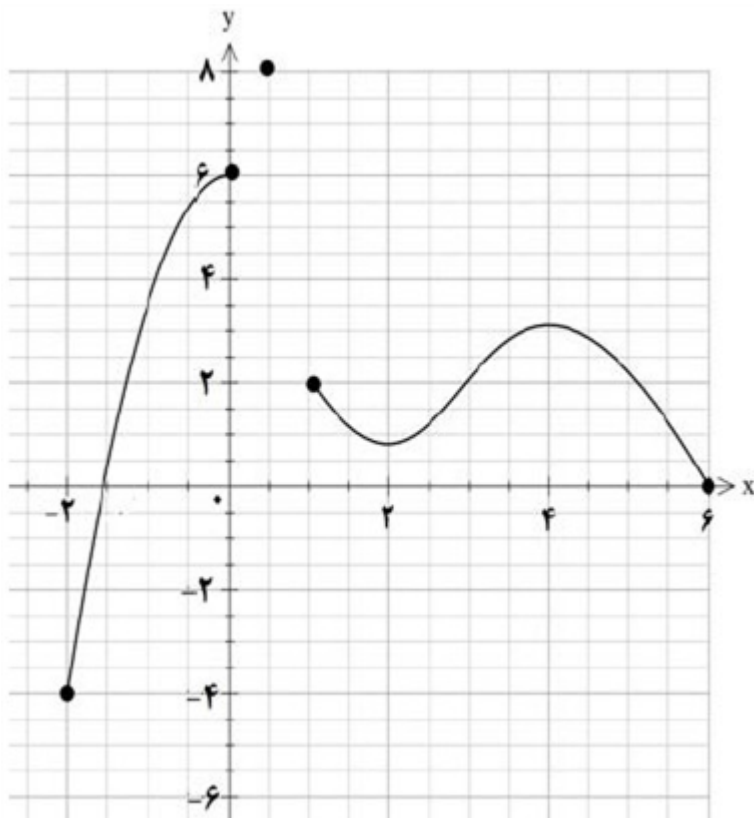
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

۲۷



با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۲۸

الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.
پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.
ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

ت) ۲

پ) ۴

ب) -۴

الف) ۸ پاسخ: ۱

اکسترمهای مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13$$

$$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$$

$$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$$

پاسخ: ۱

۲۹

مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

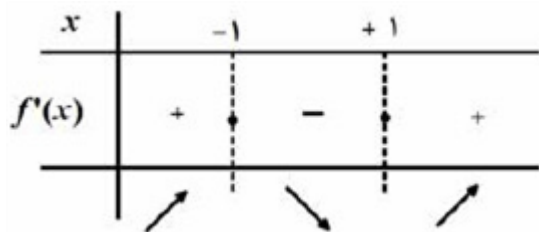
$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$$

پاسخ: ۱

۳۰

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



۳۱ پاسخ: ۱

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-1, 1)$

ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چه قدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3] \quad \text{طول جعبه} = 16 - 2x$$

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیش‌ترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

۳۲ پاسخ: ۱

اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \quad \text{max} \\ f(-1) = -3 \quad \text{min} \end{cases}$$

۳۳ پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۳۴ پاسخ: ۱ درست

در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$2(x + y) = 14 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$$

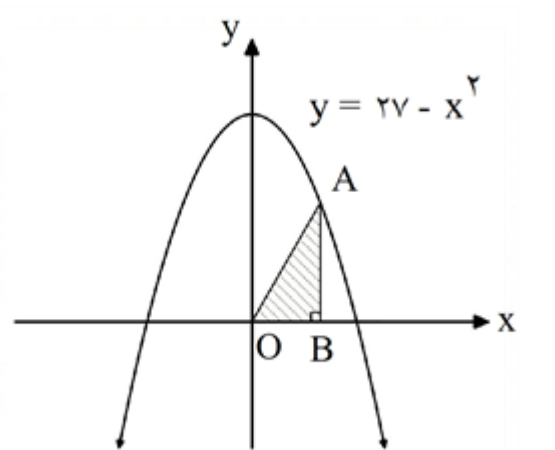
$$y = 7 - x \Rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \Rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7/2, y = 7/2$$

۳۵ پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

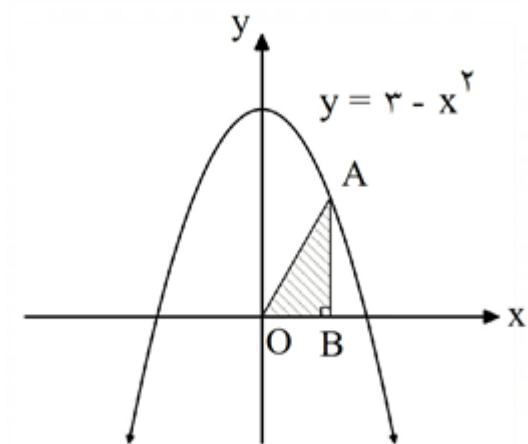
۳۶ پاسخ: ۱ درست

۳۷	اگر نقطه $(۲, ۱)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰	پاسخ: ۱	$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$ $f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$ $-12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$
۳۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰	پاسخ: ۱ درست	
۳۹	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. - بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰	پاسخ: ۱ $[-1, 1]$	
۴۰	مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 27 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.		سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم	پاسخ: ۱

$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(27 - x^2)}{2} = \frac{27}{2}x - \frac{1}{2}x^3$													
$S'(x) = \frac{27}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3 \Rightarrow y = 27 - 9 = 18$													
$S(3) = \frac{3(27 - 9)}{2} = \frac{3 \times 18}{2} = 27$													
<table><tr><td>x</td><td>۰</td><td>۳</td><td>$\sqrt{27}$</td></tr><tr><td>$S'(x)$</td><td>-</td><td>۰</td><td>+</td></tr><tr><td>$S(x)$</td><td>↗</td><td>۲۷</td><td>↘</td></tr></table>	x	۰	۳	$\sqrt{27}$	$S'(x)$	-	۰	+	$S(x)$	↗	۲۷	↘	$A(3, 18)$
x	۰	۳	$\sqrt{27}$										
$S'(x)$	-	۰	+										
$S(x)$	↗	۲۷	↘										



مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 3 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۴۱

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(3 - x^2)}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

$$S'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$$

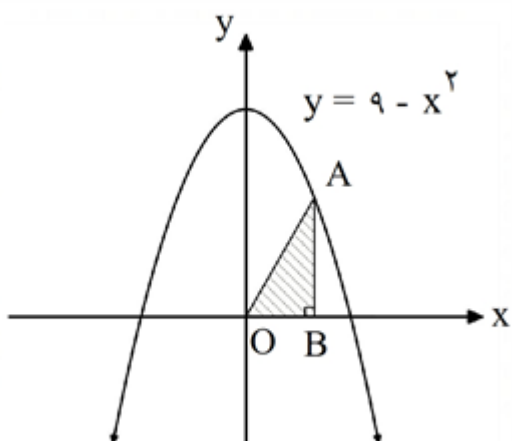
$$S(1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

x	۰	۱	$\sqrt{3}$
$S'(x)$	-	۰	+
$S(x)$	$\nearrow$	۱	$\searrow$

A(1, 2)



مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 9 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۴۲

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(9 - x^2)}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

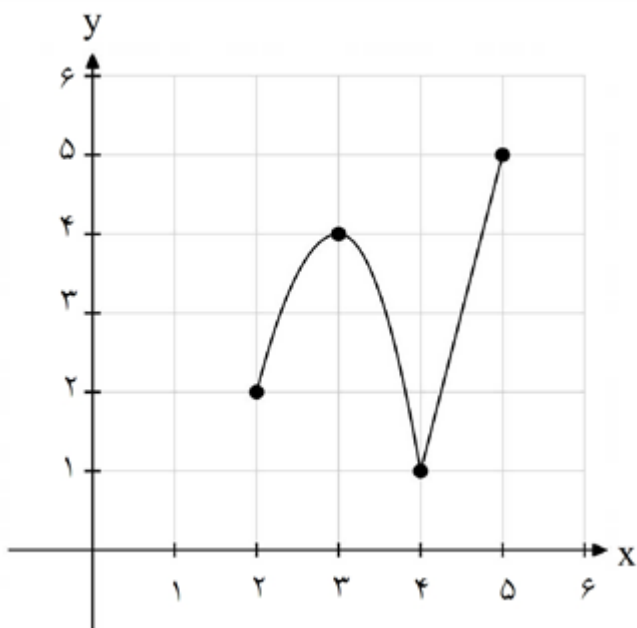
$$S'(x) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 9 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$$

$$S(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(9 - 3)}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{2} = 3\sqrt{3}$$

x	۰	$\sqrt{3}$	۳
S'(x)	-	۰	+
S(x)		$3\sqrt{3}$	

$$A(\sqrt{3}, 6)$$

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۴۳

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۴

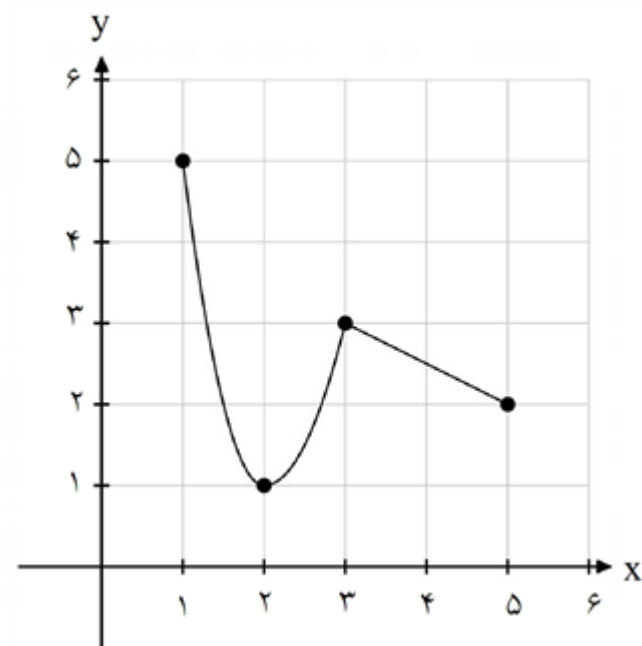
طول ماکزیمم نسبی: ۳

پاسخ: ۱

طول مینیمم مطلق: ۴

۵

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۴۴

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

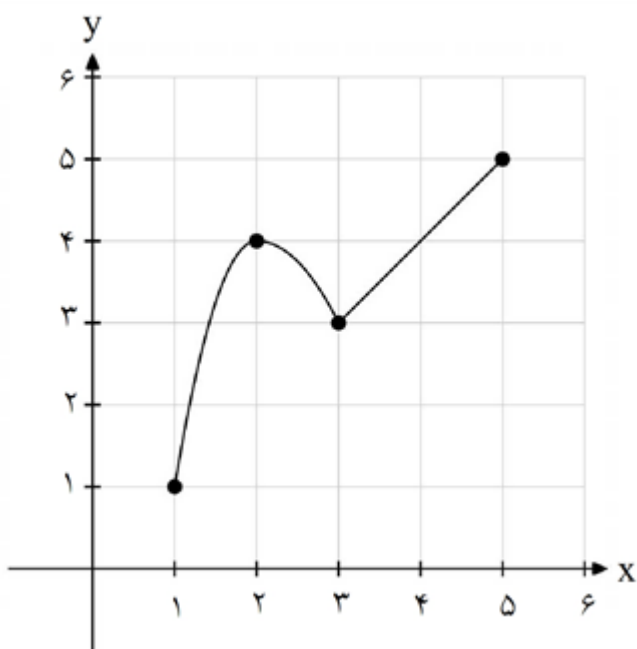
طول مینیمم نسبی: ۲

پاسخ: ۱ طول ماکزیمم نسبی: ۳

طول مینیمم مطلق: ۲

۱

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۴۵

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۳

پاسخ: ۱ طول ماکزیمم نسبی: ۲

طول مینیمم مطلق: ۱

۵



حجم یک قوطی استوانه‌ای شکل، 128π واحد مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن کمترین شود؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

پاسخ: ۱

$$\pi R^2 h = 128\pi \Rightarrow h = \frac{128}{R^2}$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \Rightarrow S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times \frac{128}{R^2} \Rightarrow S = 2\pi R^2 + \frac{256\pi}{R}$$

$$\Rightarrow S' = 4\pi R - \frac{256\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 256\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 - 256\pi = 0$$

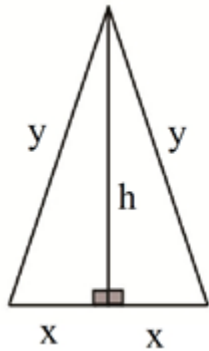
$$\Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = \frac{128}{16} = 8$$

۴۶

در یک مثلث متساوی‌الساقین اگر مجموع طول ساق‌ها برابر ۶ باشد، طول قاعده مثلث را چنان بیابید که مساحت مثلث کمترین شود.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

پاسخ: ۱



$$2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=3} h^2 + x^2 = 9 \Rightarrow h = \sqrt{9 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{9 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{9 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} \times x = \frac{9 - x^2 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}} = 0 \Rightarrow 9 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{طول قاعده مثلث} = 2x = 2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2}$$

۴۷



حجم یک قوطی استوانه‌ای شکل، 36π واحد مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن کمترین شود؟

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$\pi R^2 h = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36}{R^2}$$

پاسخ: ۱

$$S = \pi R^2 + \pi R h \Rightarrow S = \pi R^2 + \pi R \times \frac{36}{R^2} \Rightarrow S = \pi R^2 + \frac{36\pi}{R}$$

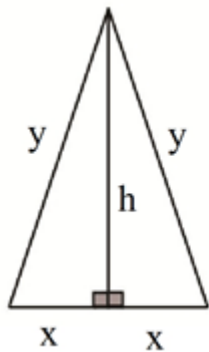
$$S' = 2\pi R - \frac{36\pi}{R^2} = \frac{2\pi R^3 - 36\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 2\pi R^3 - 36\pi = 0$$

$$\Rightarrow R^3 = 18 \Rightarrow R = \sqrt[3]{18} \Rightarrow h = \frac{36}{\sqrt[3]{18}^2} \times \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{36\sqrt[3]{18}}{18} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{18}$$

۴۸

در یک مثلث متساوی‌الساقین اگر مجموع طول ساق‌ها برابر ۱۲ باشد، طول قاعده مثلث را چنان بیابید که مساحت مثلث کمترین شود.

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم



$$2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=6} h^2 + x^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36 - x^2}$$

پاسخ: ۱

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{36 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} \times x = \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 18$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعده مثلث} = 2x = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

۴۹

غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{12t}{4t^3 + 1}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$C'(t) = \frac{12(4t^3 + 1) - 12t(12t^2)}{(4t^3 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 48t^3 + 12 - 144t^3 = 0 \Rightarrow 96t^3 = 12 \Rightarrow t^3 = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

۵۰



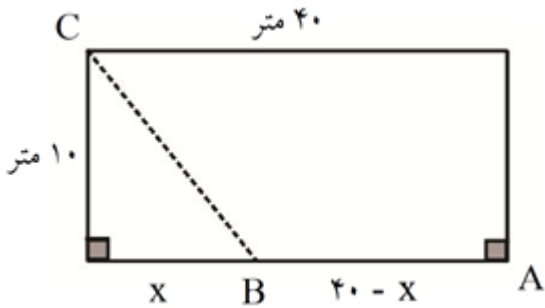
غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{t}{t^3 + 432}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

۵۱

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ $C'(t) = \frac{t^3 + 432 - 3t^2(t)}{(t^3 + 432)^2} = 0 \Rightarrow t^3 + 432 - 3t^3 = 0 \Rightarrow 2t^3 = 432 \Rightarrow t^3 = 216 \Rightarrow t = 6$

متحرکی در نقطه A قرار دارد و قرار است به نقطه C برود. اگر از نقطه A تا B با سرعت ثابت ۶ متر بر ثانیه و از نقطه B به C با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه حرکت کند، مقدار x را چنان بیابید که این متحرک در کمترین زمان ممکن به نقطه C برسد.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

پاسخ: ۱

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{40 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 100}$$

$$t_2 = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{40 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t = \frac{40}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100}}\right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 100} + 3x}{6\sqrt{x^2 + 100}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 100} + 3x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 100} = 3x$$

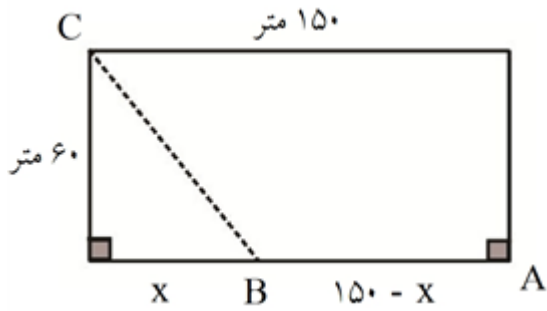
به توان می‌رسانیم ۲ $x^2 + 100 = 9x^2 \Rightarrow 8x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۵۲



متحرکی در نقطه A قرار دارد و قرار است به نقطه C برود. اگر از نقطه A تا B با سرعت ثابت ۸ متر بر ثانیه و از نقطه B به C با سرعت ثابت ۴ متر بر ثانیه حرکت کند، مقدار x را چنان بیابید که این متحرک در کمترین زمان ممکن به نقطه C برسد.



سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

پاسخ: ۱

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{150 - x}{8}$$

$$BC^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 3600}$$

$$t_2 = \frac{BC}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{150 - x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t = \frac{150}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3600} \Rightarrow t' = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3600}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 3600} + 2x}{8\sqrt{x^2 + 3600}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 3600} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3600} = 2x$$

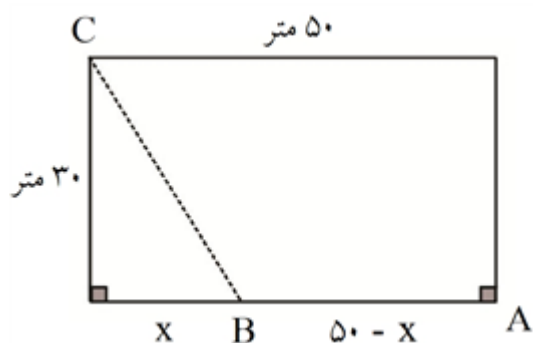
به توان می‌رسانیم

$$\rightarrow x^2 + 3600 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 3600 \Rightarrow x^2 = 1200 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

۵۳



متحرکی در نقطه A قرار دارد و قرار است به نقطه C برود. اگر از نقطه A تا B با سرعت ثابت ۶ متر بر ثانیه و از نقطه B به C با سرعت ثابت ۳ متر بر ثانیه حرکت کند، مقدار x را چنان بیابید که این متحرک در کمترین زمان ممکن به نقطه C برسد.



سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

پاسخ: ۱

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

۵۴

$$t_1 = \frac{50 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 30^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 900}$$

$$t_2 = \frac{BC}{3} = \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{3}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{50 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{3}$$

$$t = \frac{50}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 900} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 900}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 900} + 2x}{6\sqrt{x^2 + 900}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 900} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 900} = 2x$$

به توان می‌رسانیم ۲

$$x^2 + 900 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = 300 \Rightarrow x = \sqrt{300}$$

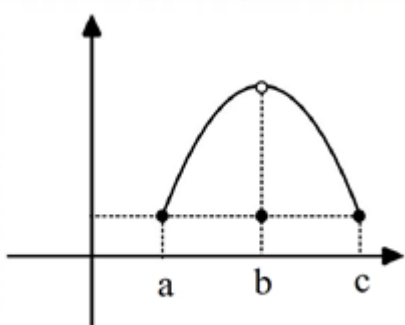
$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3}$$



	حجم یک قوطی استوانه‌ای شکل، ۱۶π واحد مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن کمترین شود؟ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ $\pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}$ $S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \Rightarrow S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times \frac{16}{R^2} \Rightarrow S = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R}$ $S' = 4\pi R - \frac{32\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 32\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 - 32\pi = 0$ $\Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow h = \frac{16}{4} = 4$	۵۵
	فاصله نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 3x + 5$ را به دست آورید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ $f(x) = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ $x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 + 5 = 3 \Rightarrow A(1, 3)$ $x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 + 5 = 7 \Rightarrow B(-1, 7)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$ $AB = 2\sqrt{5}$	۵۶
	ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه $(1, -2)$ اکسترمم نسبی داشته باشد. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و باید $f'(1) = 0$ باشد: $f(x) = x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a = 0$ $\Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$ همچنین باید $f(1) = -2$ باشد: $f(1) = -2 \Rightarrow 1 + a + b = -2 \xrightarrow{a=-2} 1 - 2 + b = -2 \Rightarrow b = -1$	۵۷
	ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + ax + b$ در $(-1, 7)$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ $(-1, 7) \Rightarrow 2(-1)^3 + a(-1) + b = 7 \Rightarrow -2 - a + b = 7 \Rightarrow -a + b = 9$ $f'(x) = 6x^2 + a \xrightarrow{x=-1} 6(-1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -6$ $\Rightarrow -(-6) + b = 9 \Rightarrow 6 + b = 9 \Rightarrow b = 3$	۵۸



در شکل زیر همه ماکزیمم یا مینیمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

مینیمم مطلق : a

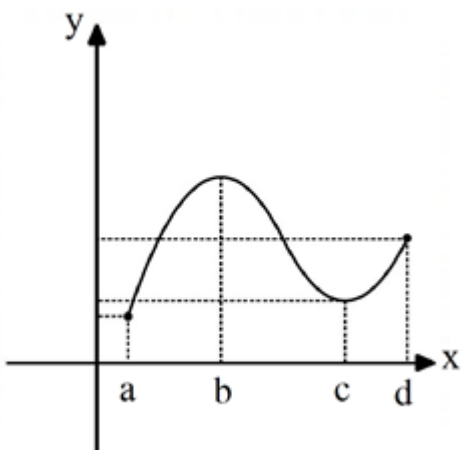
مینیمم مطلق و نسبی : b

مینیمم مطلق : c

پاسخ: ۱

۵۹

در شکل زیر همه ماکزیمم یا مینیمم‌ها نسبی و مطلق را مشخص کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

مینیمم مطلق : a

ماکزیمم نسبی و مطلق : b

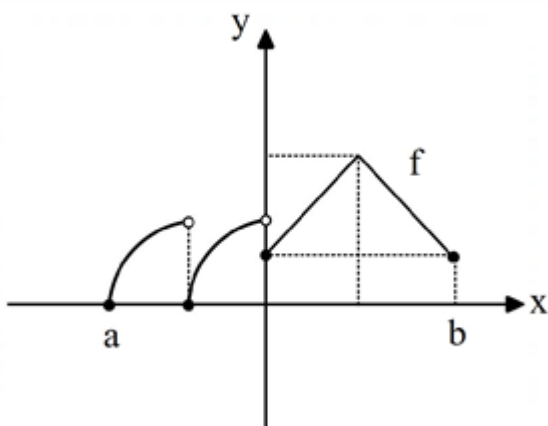
مینیمم نسبی : c

پاسخ: ۱

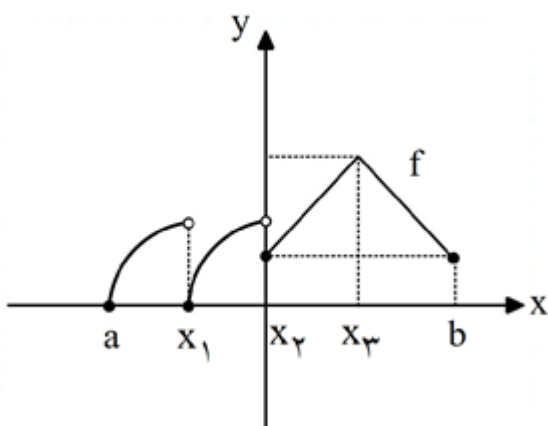
۶۰



شکل مقابل نمودار تابع f در بازه $[a, b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f و ماکزیمم یا مینیمم نسبی بودن آن را مشخص کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم



پاسخ: ۱

سه نقطه x_1, x_2, x_3 اکسترمم نسبی تابع هستند.

x_1 : مینیمم نسبی

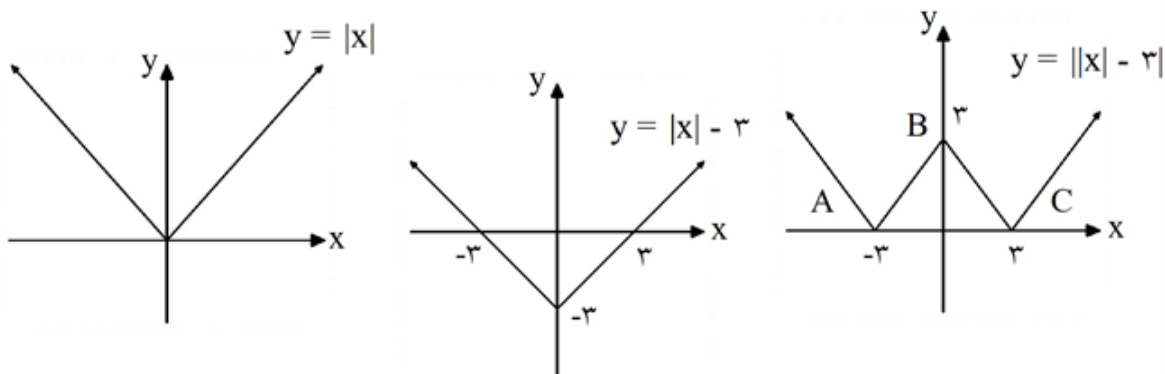
x_2 : مینیمم نسبی

x_3 : ماکزیمم نسبی



نمودار تابع $y = ||x| - 3|$ را رسم کنید و به کمک نمودار اکستریم‌های نسبی و مطلق تابع را بیابید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم



پاسخ: ۱

۶۲

با توجه به نمودار داریم:

$A(-3, 0) \Rightarrow$ مینیمم مطلق و نسبی

$B(0, 3) \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

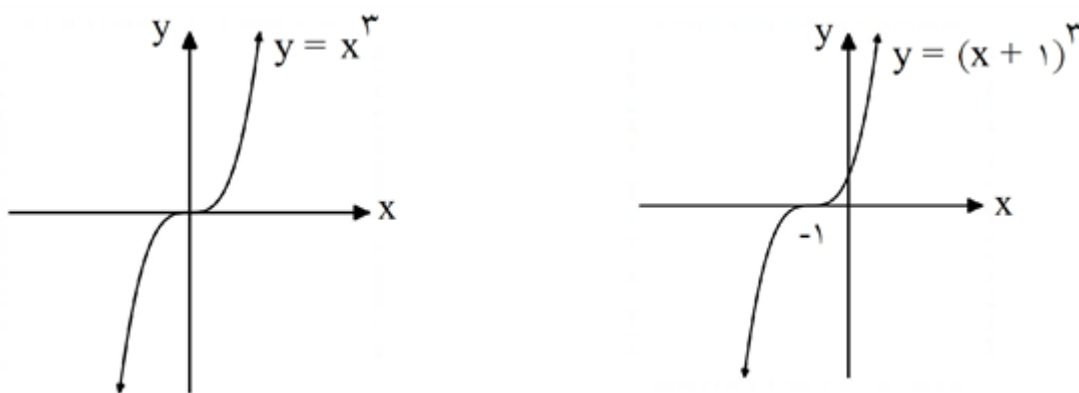
$C(3, 0) \Rightarrow$ مینیمم مطلق و نسبی

الف) تابع $y = (x + 1)^3$ را رسم کنید.
ب) مختصات نقطه بحرانی را مشخص کنید.
ج) آیا این نقطه بحرانی، اکستریم نسبی است؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ الف)

۶۳



ب)

$$y' = 3(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$

نقطه $A(-1, 0)$ نقطه بحرانی تابع $y = (x + 1)^3$ است.

ج)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y		0	

نقطه $A(-1, 0)$ نقطه اکستریم نسبی تابع نیست. زیرا علامت مشتق در اطراف نقطه A تغییر نمی‌کند.

نقاط بحرانی تابع $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$ را بیابید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

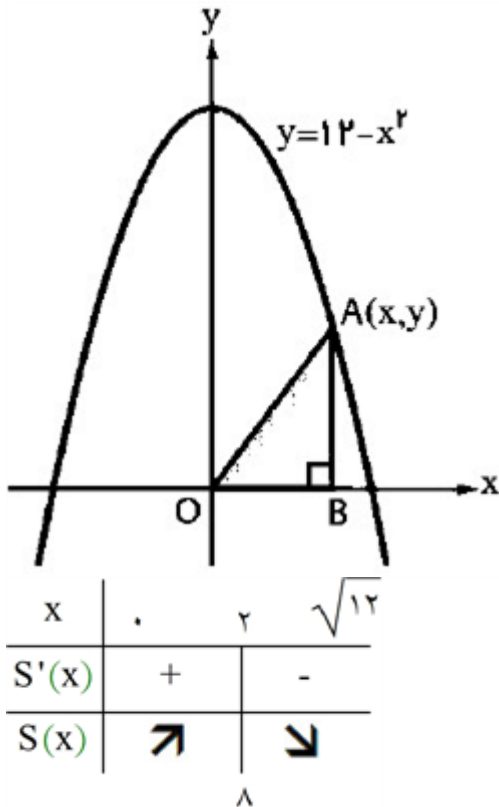
$$y' = x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۶۴

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \frac{64}{3} - 32 + 1 = \frac{64}{3} - 31 = \frac{64-93}{3} = -\frac{29}{3} \end{cases}$$





$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

$$\Rightarrow y = 12 - 4 = 8$$

۱

۳ = طول ماکزیمم نسبی
۱ = طول ماکزیمم مطلق

۲ = طول مینیمم نسبی
۴ = طول مینیمم مطلق

۲

درست

۳

$$h = \frac{300}{r^2}$$

$$S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$

۴

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

۵

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$$

$$f(-2) = 32, f(0) = 0, f(3) = -27$$

۰ = ماکزیمم مطلق -۳۲ = مینیمم مطلق

۶

x		-3		3	
f'(x)	+	○	-	○	+

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

۷

اكيداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

$$f'(x) = -8x^2 + 8x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

۸

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		$\swarrow$	$\searrow$	
		-16 Min	11 Max	

$$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y$$

$$s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y$$

$$s' = 2y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

۹

$$2h + 2r + \pi r = 8 \Rightarrow h = \frac{8 - 2r - \pi r}{2}$$

$$S(r) = 8r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 8 - 4r - \pi r \Rightarrow 8 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{8}{4 + \pi}$$

۱۰

r		$\frac{8}{4 + \pi}$	
S'	+	○	-
S	$\swarrow$		$\searrow$

$$h = \frac{8 - (2 + \pi) \frac{8}{4 + \pi}}{2} = \frac{8}{4 + \pi}$$

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غيرقابل قبول}$$

۱۱

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

درست

۱۲



$$f'(x) = -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

۱۳

x		-1		1	
f'	-	○	+	○	-
f	↘		↗		↘

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.

۱۴ نادرست

۱۵ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

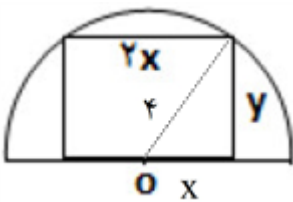
c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}, y = \sqrt{8}$$

۱۶

۱۷

طول $\sqrt{8}$ و عرض $\sqrt{8}$ است.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

۱۸

۱۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

۲۰ درست

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, x = -2$$

اكيداً صعودي $(2, +\infty), (-\infty, -2)$

x	-2	2	
f'	+	-	+
f			

$$y = 8 - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow S'(x) = -2x + 8 = 0$$

$$x = 4, y = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

x	-1	3	
f'	+	-	+
f			
	max	min	
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$	

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = -5$$

ت) ۲

پ) ۴

ب) ۴-

الف) ۸

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13$$

$$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$$

$$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$$

۲۱

۲۲

۲۳ ماکزیمم نسبی

۲۴

۲۵

۲۶

۲۷ نادرست

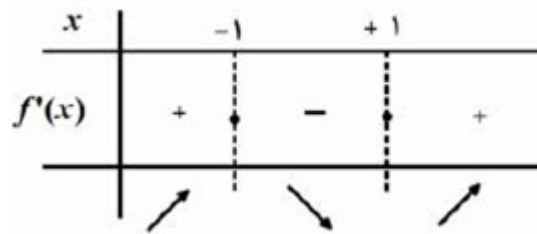
۲۸

۲۹

۳۰



$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



۳۱

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-1, +1)$

$$\text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3] \quad \text{طول جعبه} = 16 - 2x, x \in [0, 8]$$

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

۳۲

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \quad \text{max} \\ f(-1) = -3 \quad \text{min} \end{cases}$$

۳۳

درست ۳۴

$$2(x + y) = 14 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$$

$$y = 7 - x \Rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \Rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7/2, y = 7/2$$

۳۵

درست ۳۶

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$-12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$$

۳۷

درست ۳۸

$[-1, 1]$ ۳۹



$$S(x) = \frac{OA \times AB}{\sqrt{}} = \frac{x(27 - x^3)}{\sqrt{}} = \frac{27}{\sqrt{}}x - \frac{1}{\sqrt{}}x^3$$

۴۰

$$S'(x) = \frac{27}{\sqrt{}} - \frac{3}{\sqrt{}}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3 \Rightarrow y = 27 - 9 = 18$$

$$S(3) = \frac{3(27 - 9)}{\sqrt{}} = \frac{3 \times 18}{\sqrt{}} = 27$$

x	.	3	$\sqrt{27}$
S'(x)	-	0	+
S(x)	↗	27	↘

A(3, 18)

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{\sqrt{}} = \frac{x(3 - x^3)}{\sqrt{}} = \frac{3}{\sqrt{}}x - \frac{1}{\sqrt{}}x^3$$

۴۱

$$S'(x) = \frac{3}{\sqrt{}} - \frac{3}{\sqrt{}}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x>0} x = 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$$

$$S(1) = \frac{3}{\sqrt{}} - \frac{1}{\sqrt{}} = 1$$

x	.	1	$\sqrt{3}$
S'(x)	-	0	+
S(x)	↗	1	↘

A(1, 2)

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{\sqrt{}} = \frac{x(9 - x^3)}{\sqrt{}} = \frac{9}{\sqrt{}}x - \frac{1}{\sqrt{}}x^3$$

۴۲

$$S'(x) = \frac{9}{\sqrt{}} - \frac{3}{\sqrt{}}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 9 - (\sqrt{3})^3 = 9 - 3 = 6$$

$$S(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(9 - 3)}{\sqrt{}} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{\sqrt{}} = 3\sqrt{3}$$

x	.	$\sqrt{3}$	3
S'(x)	-	0	+
S(x)	↗	$3\sqrt{3}$	↘

A($\sqrt{3}$, 6)

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۴

طول ماکزیمم نسبی: ۳

۴۳

طول مینیمم مطلق: ۴

۵

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۲

طول ماکزیمم نسبی: ۳

۴۴

طول مینیمم مطلق: ۲

۱

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۳

طول ماکزیمم نسبی: ۲

۴۵

طول مینیمم مطلق: ۱

۵

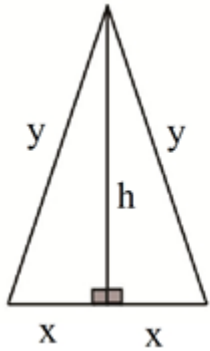


$$\pi R^{\sqrt{}} h = 12\lambda\pi \Rightarrow h = \frac{12\lambda}{R^{\sqrt{}}}$$

$$S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \sqrt{2}\pi R h \Rightarrow S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \sqrt{2}\pi R \times \frac{12\lambda}{R^{\sqrt{}}} \Rightarrow S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \frac{24\sqrt{2}\pi}{R}$$

$$\Rightarrow S' = \sqrt{2}\pi R - \frac{24\sqrt{2}\pi}{R^2} = \frac{\sqrt{2}\pi R^3 - 24\sqrt{2}\pi}{R^3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\pi R^3 - 24\sqrt{2}\pi = 0$$

$$\Rightarrow R^3 = 12 \Rightarrow R = \sqrt[3]{12} \Rightarrow h = \frac{12\lambda}{\sqrt[3]{12}} = \lambda$$



$$\sqrt{2}y = 4 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=\sqrt{2}} h^2 + x^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{2} = \frac{\sqrt{2}x \times h}{2} = x\sqrt{2 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{2 - x^2} + \frac{-\sqrt{2}x}{2\sqrt{2 - x^2}} \times x = \frac{2 - x^2 - x^2}{2\sqrt{2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

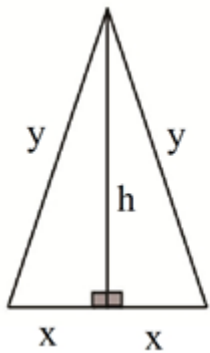
$$\text{طول قاعدہ مثلث} = \sqrt{2}x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$\pi R^{\sqrt{}} h = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36}{R^{\sqrt{}}}$$

$$S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \sqrt{2}\pi R h \Rightarrow S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \sqrt{2}\pi R \times \frac{36}{R^{\sqrt{}}} \Rightarrow S = \sqrt{2}\pi R^{\sqrt{}} + \frac{72\sqrt{2}\pi}{R}$$

$$S' = \sqrt{2}\pi R - \frac{72\sqrt{2}\pi}{R^2} = \frac{\sqrt{2}\pi R^3 - 72\sqrt{2}\pi}{R^3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\pi R^3 - 72\sqrt{2}\pi = 0$$

$$\Rightarrow R^3 = 36 \Rightarrow R = \sqrt[3]{36} \Rightarrow h = \frac{36}{\sqrt[3]{36}} \times \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{36\sqrt[3]{18}}{18} \Rightarrow h = \sqrt[3]{18}$$



$$2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=6} h^2 + x^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{36 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} \times x = \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 18$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعدہ مثلث} = 2x = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

$$C'(t) = \frac{12(4t^3 + 1) - 12t(12t^2)}{(4t^3 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 48t^3 + 12 - 144t^3 = 0 \Rightarrow 96t^3 = 12 \Rightarrow t^3 = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$C'(t) = \frac{t^3 + 432 - 3t^2(t)}{(t^3 + 432)^2} = 0 \Rightarrow t^3 + 432 - 3t^3 = 0 \Rightarrow 2t^3 = 432 \Rightarrow t^3 = 216 \Rightarrow t = 6$$

۴۹

۵۰

۵۱



$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{40 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 100 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 100}$$

$$t_2 = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{40 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t = \frac{40}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 100}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 100} + x}{6\sqrt{x^2 + 100}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 100} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 100} = x$$

به توان می‌رسانیم ۲

$$\rightarrow x^2 + 100 = x^2 \Rightarrow 100 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{1} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{150 - x}{8}$$

$$BC^2 = x^2 + 400 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 400}$$

$$t_2 = \frac{BC}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{4}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{150 - x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{4}$$

$$t = \frac{150}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 400} \Rightarrow t' = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 400}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 400} + x}{8\sqrt{x^2 + 400}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 400} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 400} = x$$

به توان می‌رسانیم ۲

$$\rightarrow x^2 + 400 = x^2 \Rightarrow 400 = 0 \Rightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40\sqrt{2}$$



$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{50 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 30^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 900}$$

$$t_2 = \frac{BC}{3} = \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{3}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{50 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{3}$$

$$t = \frac{50}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 900} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 900}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 900} + 2x}{6\sqrt{x^2 + 900}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 900} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 900} = 2x$$

به توان می‌رسانیم

$$x^2 + 900 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = 300 \Rightarrow x = \sqrt{300}$$

$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3}$$

$$\pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \Rightarrow S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times \frac{16}{R^2} \Rightarrow S = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R}$$

$$S' = 4\pi R - \frac{32\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 32\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 - 32\pi = 0$$

$$\Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow h = \frac{16}{4} = 4$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1.5 \\ x = -1.5 \end{cases}$$

$$x = 1.5 \Rightarrow y = 1.5^2 - 3(1.5) + 5 = 2.25 \Rightarrow A(1.5, 2.25)$$

$$x = -1.5 \Rightarrow y = (-1.5)^2 - 3(-1.5) + 5 = 9.75 \Rightarrow B(-1.5, 9.75)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1.5 - 1.5)^2 + (9.75 - 2.25)^2} = \sqrt{9 + 56.25} = \sqrt{65.25}$$

$$AB = 2.5\sqrt{52}$$



۵۷ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و باید $f'(1) = 0$ باشد:

$$f(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a = 0 \\ \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a = -2$$

همچنین باید $f(1) = -2$ باشد:

$$f(1) = -2 \Rightarrow 1 + a + b = -2 \xrightarrow{a=-2} 1 - 2 + b = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$(-1, 7) \Rightarrow 2(-1)^2 + a(-1) + b = 7 \Rightarrow -2 - a + b = 7 \Rightarrow -a + b = 9$$

$$f'(x) = 2x + a \xrightarrow{x=-1} 2(-1) + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ \Rightarrow -(-2) + b = 9 \Rightarrow 2 + b = 9 \Rightarrow b = 7$$

a : مینیمم مطلق

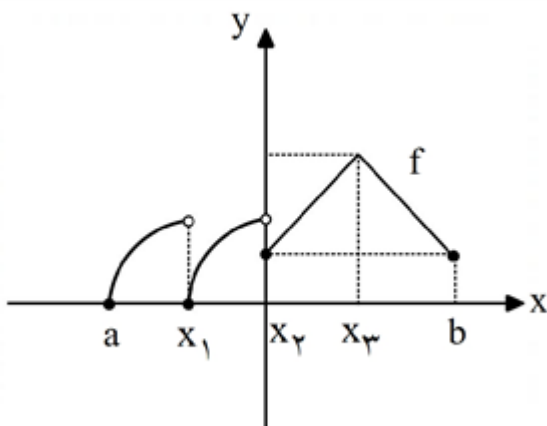
b : مینیمم مطلق و نسبی

c : مینیمم مطلق

a : مینیمم مطلق

b : ماکزیمم نسبی و مطلق

c : مینیمم نسبی

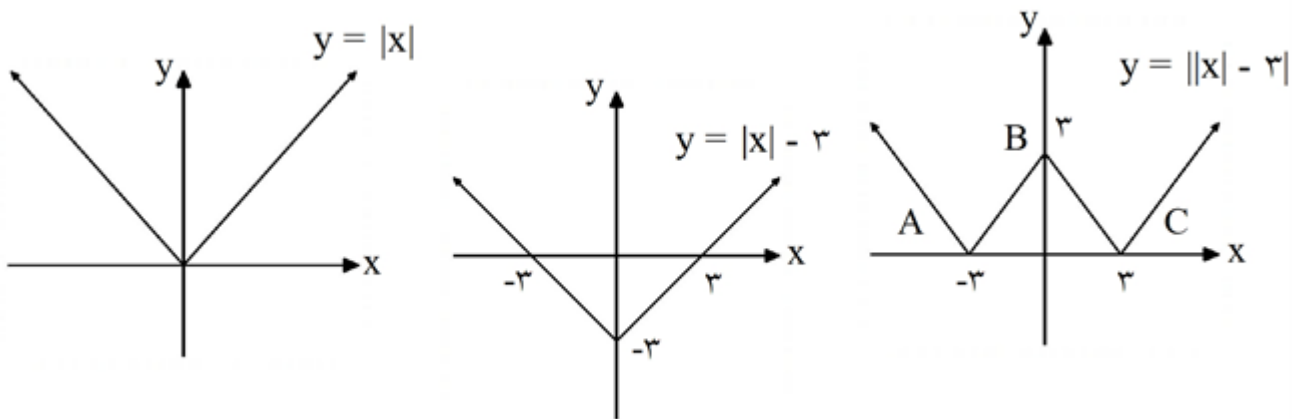


سه نقطه x_1, x_2, x_3 اکسترمم نسبی تابع هستند.

x_1 : مینیمم نسبی

x_2 : مینیمم نسبی

x_3 : ماکزیمم نسبی



۶۲

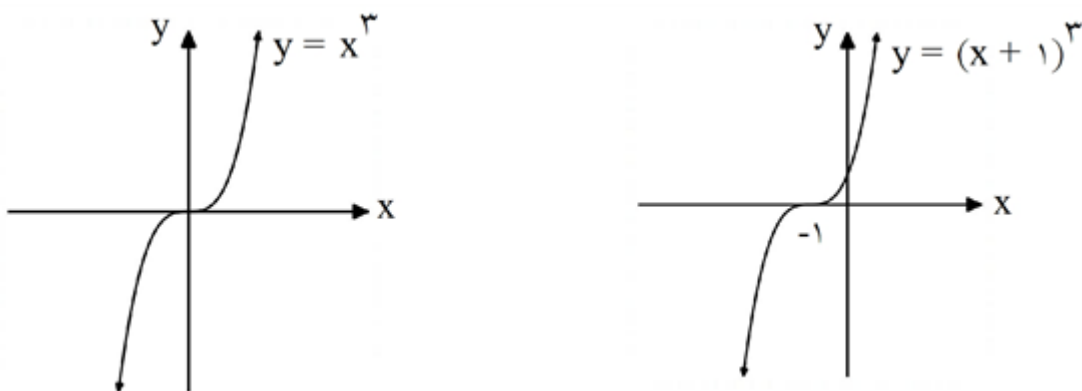
با توجه به نمودار داریم:

$A(-3, 0) \Rightarrow$ مینیمم مطلق و نسبی

$B(0, 3) \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$C(3, 0) \Rightarrow$ مینیمم مطلق و نسبی

۶۳ الف



ب

$$y' = 3(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$

نقطه $A(-1, 0)$ نقطه بحرانی تابع $y = (x + 1)^3$ است.

ج

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	•	+
y		•	

نقطه $A(-1, 0)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع نیست. زیرا علامت مشتق در اطراف نقطه A تغییر نمی‌کند.

$$y' = x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \frac{64}{3} - 32 + 1 = \frac{64}{3} - 31 = \frac{64 - 93}{3} = -\frac{29}{3} \end{cases}$$

۶۴

