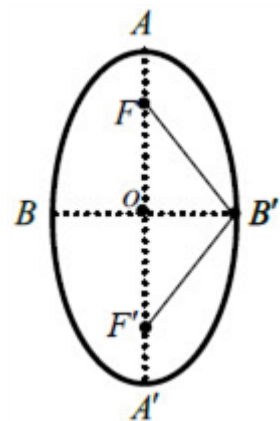


ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$، نقطه $O(1, 2)$ باشد. الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳ پاسخ: ۱ الف) $-\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$ ب) $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} \Rightarrow r = 3$	
۲	در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳ پاسخ: ۱ $2b = 2c \Rightarrow b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$ $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
۳	معادله دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (1, 3)$	
۴	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳ پاسخ: ۱ سهمی	
۵	مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط $(1, -2)$ و $(1, 6)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{1}{4}$ باشد، فاصله کانونی آن را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $2a = 8 \Rightarrow a = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$	

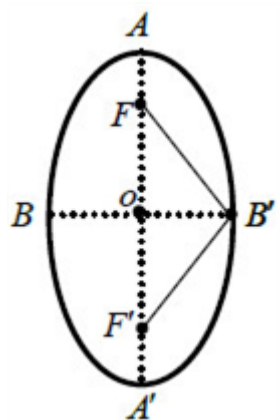
۶	وضعیت خط $3x + 4y = 0$ را نسبت به دایره به معادله $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$ مشخص کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $O(2, -2), r = 3, d = \frac{ 3 \times 2 + 4(-2) }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}$ چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.
۷	معادله قطر کانونی یک بیضی، $y = -1$ و معادله قطر کوچک، $x = 2$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس: $O(2, -1)$ با توجه به اینکه $AA' = 12$ و $BB' = 8$، بنابراین: $AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$ $BB' = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ همچنین: $c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{5}$
۸	اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 : O(-1, 2), r = 2$ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 : O'(2, -1), r' = m$ $OO' = 3\sqrt{2}$ $OO' = r + r' \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2$
۹	جمله‌ی زیر را کامل کنید. اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲ پاسخ: ۱ دایره
۱۰	معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-1, -1), r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{10}$

در بیضی مقابل کانون‌ها به مختصات $F'(1, 1)$ و $F(1, 5)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(1, 6)$ می‌باشد:
 الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.
 ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.
 پ) مساحت مثلث $B'FF'$ را به دست آورید.



۱۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



الف) $FF' = 4$, $O(1, 3)$

ب) $y = 3$

پ) $OB' = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5}$

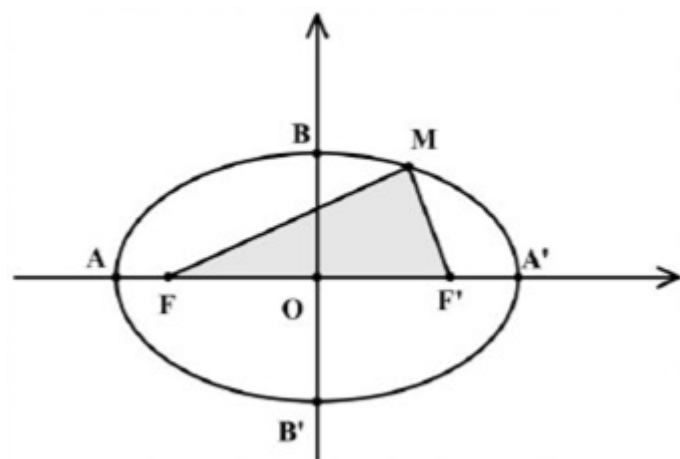
$S = \frac{1}{2} OB' \times FF' = 2\sqrt{5}$

پاسخ: ۱

اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(4, 0)$ و مختصات رأس $B(0, 3)$ باشد:

الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث $\triangle MFF'$ را بیابید.



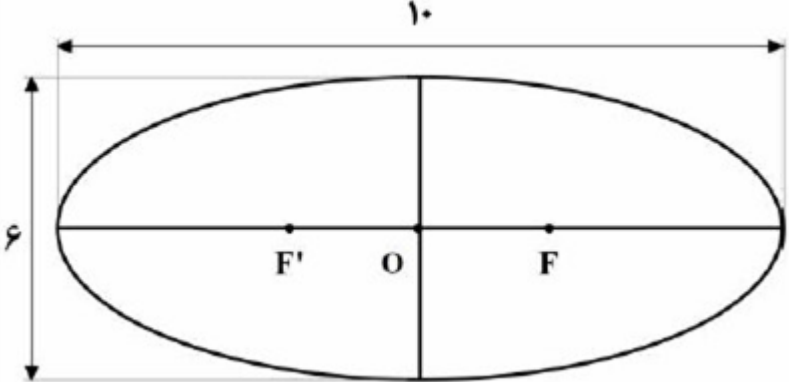
۱۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

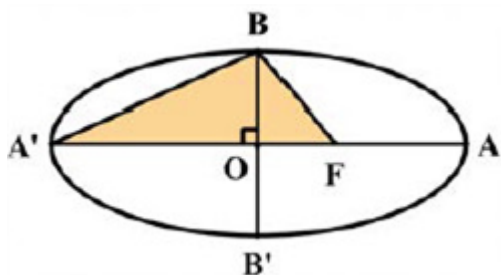
الف) $\begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2a = 10$

ب) محیط $= 2a + 2c = 18$

پاسخ: ۱

	معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است. الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید. ب) آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ الف) $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$ ب) خیر زیرا: $(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$	۱۳
	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. - شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، آن نامیده می‌شود. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ سطح مقطع	۱۴
	در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8$	۱۵
	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(1, 4)$ و بر خط $3x + 4y = -1$ مماس باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ $r = \frac{ 3 \times 1 + 4(4) + 1 }{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$	۱۶

اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:
الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)
ب) مساحت مثلث هاشورخورده $(\triangle BF'A')$ چقدر است؟



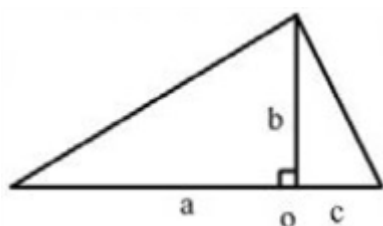
۱۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $a = 5$
 $b = 4 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$

پاسخ: ۱

ب)



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(5 + 3) \times 4 = 16$$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.

۱۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است.

۱۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ $\frac{3}{4}$

کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟

۱) $(0, 0)$ ۲) $(1, 0)$ ۳) $(0, -1)$ ۴) $(-1, 0)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

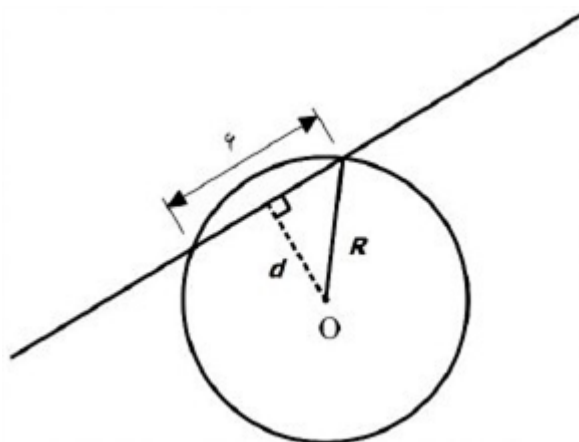
۲۰

$O \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right., R = \sqrt{1 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$

۲ (گزینه ۲) $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2 \Rightarrow OA = R$

۲۱	در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴, ۵) باشد: الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ پاسخ: ۱ الف) $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$ ب) $A(4 + 3, 5), A'(4 - 3, 5)$
۲۲	وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ پاسخ: ۱ $R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 12} = 2, O(1, 0)$ $OH = \frac{ 1 \times 1 + 0 \times 1 - 3 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow OH < R$ خط و دایره متقاطع‌اند.
۲۳	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن (۰, ۳) و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰ پاسخ: ۱ $r = \frac{ 3 \times 0 - 4 \times 3 - 3 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$
۲۴	کانون‌های یک بیضی نقاط (۱, ۳) و (۱, -۵) است. الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است). سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰ پاسخ: ۱ الف) $O \left \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right.$ مرکز $FF' = 3 - (-5) = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$ ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



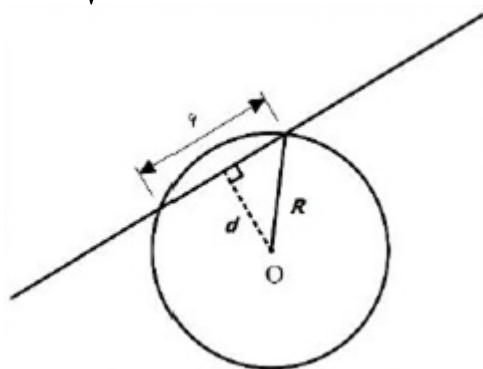
۲۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

پاسخ: ۱



۲۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۲۷

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۲

۲۸

اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 - 6x + ay - 3 = 0$ نقطه $O(3, 2)$ باشد:
(الف) مقدار a را بیابید.
(ب) شعاع دایره را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$2y + a = 0 \xrightarrow{y=2} 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

پاسخ: ۱ (الف)

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{64} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

(ب)

اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + 2x + ay - 1 = 0$ نقطه $O(-1, 3)$ باشد:
الف) مقدار a را بیابید.
ب) شعاع دایره را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم

۲۹

پاسخ: ۱ الف)

$$2y + a = 0 \xrightarrow{y=3} 6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$$

ب)

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 36 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11}$$

در یک بیضی فاصله کانونی $\frac{3}{4}$ برابر طول قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم

پاسخ: ۱

$$FF' = \frac{3}{4} BB' \Rightarrow 2c = \frac{3}{4} (2b) \Rightarrow c = \frac{3}{4} b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{c=\frac{3}{4}b} a^2 = b^2 + \left(\frac{3}{4}b\right)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + \frac{9}{16}b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}b^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{4}b$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3}{4}b}{\frac{5}{4}b} = \frac{3}{5}$$

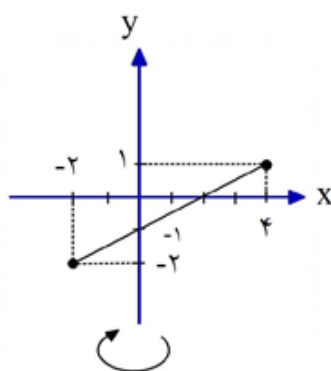
۳۰

تابع $y = \frac{x}{2} - 1$ با دامنه $[-2, 4]$ حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را حساب کنید.

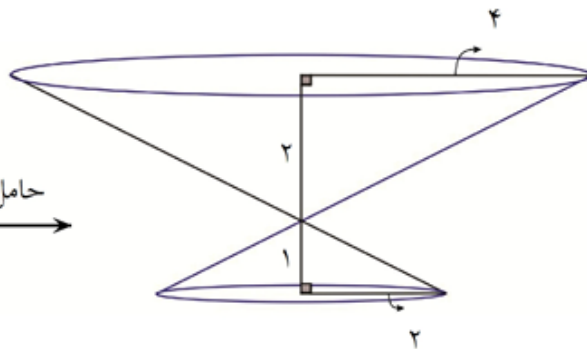
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم

پاسخ: ۱ از دوران حاصل دو مخروط تشکیل می‌شود.

x	-2	0	4
y	-2	-1	1



حامل دوران



۳۱

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} + V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3} \pi (2)^2 (1) + \frac{1}{3} \pi (1)^2 (2)$$

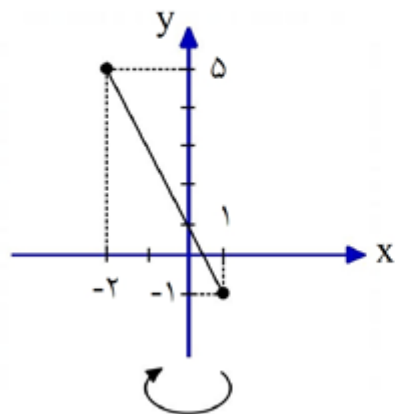
$$V_{\text{کل}} = \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

تابع $y = 1 - 2x$ با دامنه $[-2, 1]$ حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را حساب کنید.

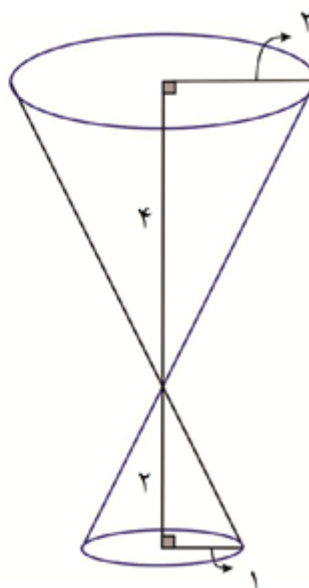
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ از دوران حاصل دو مخروط تشکیل می‌شود.

x	-2	0	1
y	5	1	-1



حامل دوران



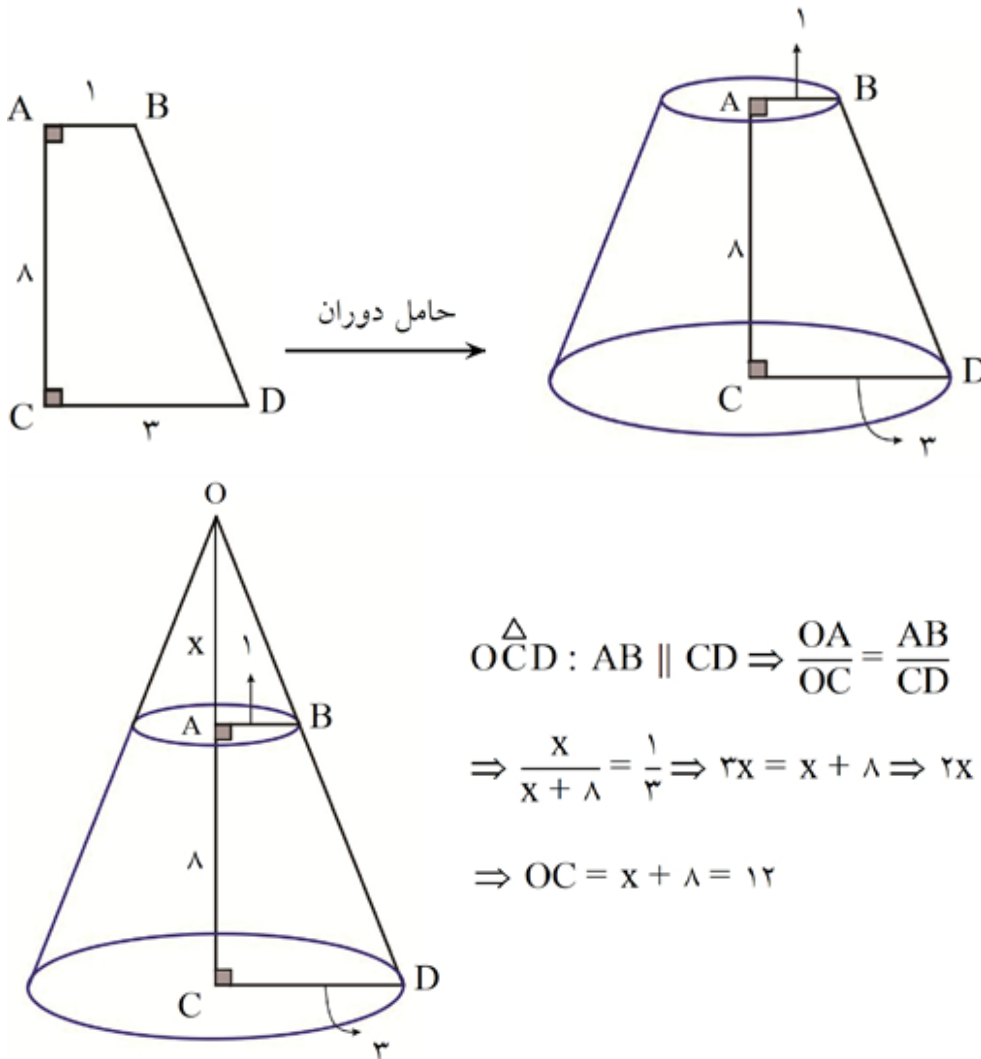
$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} + V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3}\pi(2)^2(4) + \frac{1}{3}\pi(1)^2(2)$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{16\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} = 6\pi$$

یک دوزنقه قائم‌الزاویه به ساق قائم ۸ و قاعده‌های ۱ و ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم شکل را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ دوزنقه به صورت زیر است که از دوران حول ساق قائم یک مخروط ناقص حاصل می‌شود.



$$\triangle OAB : \triangle OCD : AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow OC = x + 8 = 12$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3}\pi(3)^2(12) - \frac{1}{3}\pi(1)^2(4)$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = 36\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{104\pi}{3}$$

۳۳

خط به معادله $4x - 3y + m = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ را قطع نمی‌کند. حدود m را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ وقتی خط دایره را قطع نمی‌کند یعنی خارج دایره قرار دارد و برای آنکه خط خارج دایره باشد، باید فاصله خط تا مرکز دایره را بزرگ‌تر از شعاع قرار دهیم.

$$\begin{cases} 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow O(1, -\frac{2}{3})$$

$$d > R \Rightarrow \frac{|8 + 3 + m|}{5} > 2 \Rightarrow |m + 11| > 10$$

$$\Rightarrow m + 11 < -10 \text{ یا } m + 11 > 10 \Rightarrow m < -21 \text{ یا } m > -1$$

۳۴

	نقطه $A(1, 3)$ روی محیط دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m - 1 = 0$ قرار دارد: الف) m و k را حساب کنید. ب) مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ الف) در معادله دایره باید ضریب x^2 و y^2 برابر باشد. بنابراین: $k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$ برای آنکه $A(1, 3)$ روی محیط دایره باشد، باید $x = 1$ و $y = 3$ را درون معادله دایره قرار دهیم و حاصل برابر صفر است. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (1)^2 + (3)^2 + 4(1) - 6(3) + m - 1 = 0$ $\Rightarrow 1 + 9 + 4 - 18 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = 5$ ب) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ $\begin{cases} x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow O(-2, 3)$ $R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$	۳۵
	اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی محیط دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2k - 1 = 0$ باشد: الف) k را حساب کنید. ب) شعاع و مرکز دایره را حساب کنید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ الف) اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره باشد، به جای x و y اعداد -1 و 1 قرار می‌دهیم و حاصل برابر صفر است. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1)^2 + (1)^2 - 2(-1) + 4(1) + 2k - 1 = 0$ $\Rightarrow 1 + 1 + 2 + 4 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow 2k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$ ب) $O \begin{cases} h = \frac{-D}{2} = \frac{1}{2} = 1 \\ k = \frac{-E}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$ $R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1 + 4 + 8} = \sqrt{13}$	۳۶
	اگر نقطه $A(1, 1)$ درون دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$ باشد، حدود m را حساب کنید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ اگر نقطه $A(1, 1)$ درون دایره باشد باید به جای x و y عدد یک قرار دهیم و حاصل کوچک‌تر از صفر باشد. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 1^2 - 4(1) + 2(1) + m < 0 \Rightarrow m < 0$	۳۷

	اگر خطی در نقطه $(-۸, ۵)$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۱, ۲)$ مماس باشد، معادله خط مماس را بنویسید. سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ باید نقطه $(-۸, ۵)$ روی محیط دایره باشد. قرینه و معکوس می‌کنیم $\rightarrow m' = ۳$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{۵ - ۲}{-۸ - ۱} = \frac{۳}{-۹} = -\frac{۱}{۳}$ معادله خط مماس برابر است با: $y - y' = m'(x - x_1) \Rightarrow y - ۵ = ۳(x + ۸) \Rightarrow y - ۵ = ۳x + ۲۴ \Rightarrow y = ۳x + ۲۹$	۳۸
	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. الف) شعاع دایره $x^2 + y^2 + ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ برابر است. ب) مرکز دایره $x^2 + y^2 - ۲x + ۶y + ۱ = ۰$ نقطه $O(۰, ۰)$ است. سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ الف) $\sqrt{۲}$ ب) $O(۱, -۳)$	۳۹
	دایره $C_۱$ به مرکز $(۲, ۱)$ و شعاع ۳ با دایره $C_۲$ به مرکز $(-۱, ۵)$ مماس بیرون هستند. الف) اندازه شعاع $C_۲$ را به دست آورید. ب) معادله گسترده دایره $C_۲$ را بنویسید. سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ الف) $O_۱, O_۲ = \sqrt{(۲+۱)^2 + (۱-۵)^2} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$ $O_۱, O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۳ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۲$ ب) $O_۲(-۱, ۵)$ و $R_۲ = ۲ \Rightarrow (x+۱)^2 + (y-۵)^2 = ۴$ $\Rightarrow x^2 + ۲x + ۱ + y^2 - ۱۰y + ۲۵ - ۴ = ۰$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + ۲x - ۱۰y + ۲۲ = ۰$	۴۰
	خط به معادله $x + y + ۲ = ۰$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 + ۶x - ۲y + ۸ = ۰$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مختصات این نقاط را به دست آورید. سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم پاسخ: ۱ $x + y + ۲ = ۰ \Rightarrow y = -۲ - x$ در معادله دایره به جای y، $-۲ - x$ قرار می‌دهیم. $x^2 + (-۲ - x)^2 + ۶x - ۲(-۲ - x) + ۸ = ۰$ $\Rightarrow x^2 + x^2 + ۴x + ۴ + ۶x + ۴ + ۲x + ۸ = ۰$ $\Rightarrow ۲x^2 + ۱۲x + ۱۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^2 + ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۴) = ۰$ $\begin{cases} x = -۲ \Rightarrow y = -۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow A(-۲, ۰) \\ x = -۴ \Rightarrow y = -۲ + ۴ = ۲ \Rightarrow B(-۴, ۲) \end{cases}$	۴۱

طول وتری که خط $x + y - 2 = 0$ از دایره $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 64$ جدا می‌کند را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

شعاع $R = \sqrt{64} = 8$

پاسخ: ۱

فاصله O تا خط $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 - 1 - 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{64 - 5} = 2\sqrt{59}$

۴۲

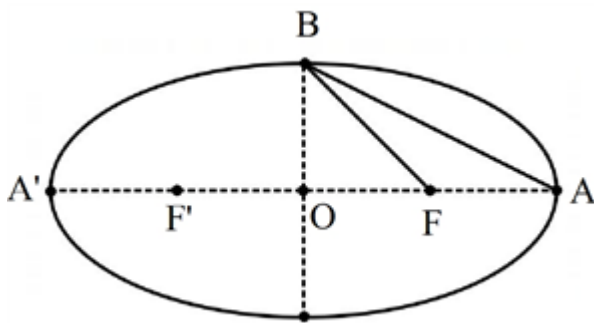
در بیضی زیر، کانون‌ها به مختصات $F(5, 1)$ و $F'(-7, 1)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(9, 1)$ می‌باشد.

(الف) مختصات مرکز و فاصله کانونی را حساب کنید.

(ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.

(ج) خروج از مرکز بیضی را به دست آورید

(د) مساحت مثلث BFA را محاسبه کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ الف

$F(5, 1)$
 $F'(-7, 1) \Rightarrow O\left(\frac{5 + (-7)}{2}, \frac{1 + 1}{2}\right) \Rightarrow O(-1, 1)$

$FF' = 2c = 5 - (-7) = 12$

(ب) معادله قطر کوچک بیضی برابر $x = -1$ است.

(ج) فاصله A تا O برابر a است، بنابراین:

$a = 9 - (-1) = 10$
 $2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} = 0.6$

(د)

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$

$S_{\triangle BFA} = \frac{b(a - c)}{2} = \frac{8(10 - 6)}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$

۴۳

$$\text{الف) } -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{ب) } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} \Rightarrow r = 3$$

$$2b = 2c \Rightarrow b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1, 1)$$

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$$

$$O(2, -2), r = 3, d = \frac{|3 \times 2 + 4(-2)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}$$

چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس: $O(2, -1)$

$$AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

با توجه به اینکه $AA' = 12$ و $BB' = 8$ ، بنابراین:

$$BB' = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{5}$$

همچنین:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 : O(-1, 2), r = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 : O'(2, -1), r' = m$$

$$OO' = 2\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow m + 2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2} - 2$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-1, -1), r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{10}$$

۱

۲

۳

۴ سهمی

۵

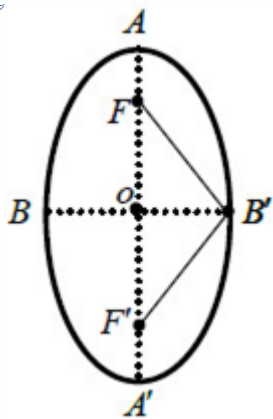
۶

۷

۸

۹ دایره

۱۰



الف) $FF' = 4, O(1, 3)$

ب) $y = 3$

پ) $OB' = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2} OB' \times FF' = 2\sqrt{5}$

۱۱

الف) $\begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2a = 10$

ب) محیط $= 2a + 2c = 18$

الف) $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$

ب) خیر زیرا: $(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$

۱۳

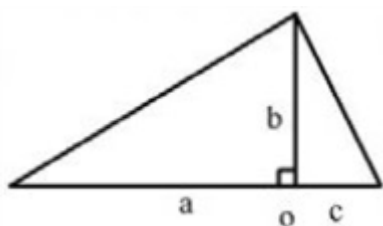
۱۴ سطح مقطع

$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8$

$r = \frac{|3 \times 1 + 4(4) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$

الف) $\begin{matrix} a = 5 \\ b = 4 \end{matrix} \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$

ب)



$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5 + 3) \times 4 = 16$

۱۸ نادرست

$\frac{3}{4}$

۱۹

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$O \Big|_{-\frac{1}{2}}, R = \sqrt{1 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$

گزینه ۲ $A \Big|_{\frac{1}{2}} \Rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2 \Rightarrow OA = R$

$$\text{الف)} c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$$

$$\text{ب)} A(4+3, 5), A'(4-3, 5)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 12} = 2, O(1, 0)$$

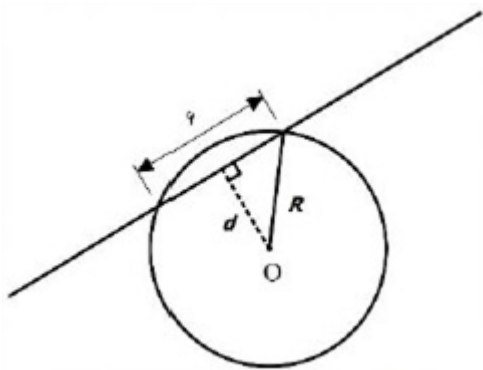
$$OH = \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow OH < R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

$$r = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$\text{الف)} O \left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right. \text{مرکز } FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$$

$$\text{ب)} b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$$



$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

درست ۲۶

۲ ۲۷

الف) ۲۸

ب)

الف) ۲۹

ب)

$$2y + a = 0 \xrightarrow{y=2} 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{64} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$2y + a = 0 \xrightarrow{y=3} 6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 36 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11}$$

$$FF' = \frac{r}{4} BB' \Rightarrow r c = \frac{r}{4} (r b) \Rightarrow c = \frac{r}{4} b$$

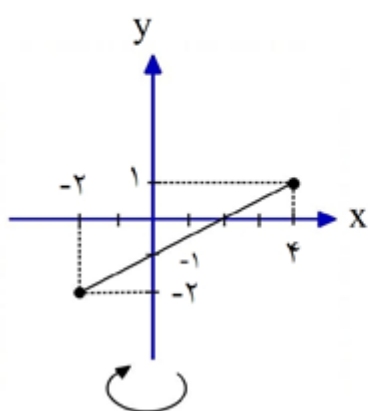
$$a^r = b^r + c^r \xrightarrow{c = \frac{r}{4} b} a^r = b^r + \left(\frac{r}{4} b\right)^r \Rightarrow a^r = b^r + \frac{9}{16} b^r \Rightarrow a^r = \frac{25}{16} b^r$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{4} b$$

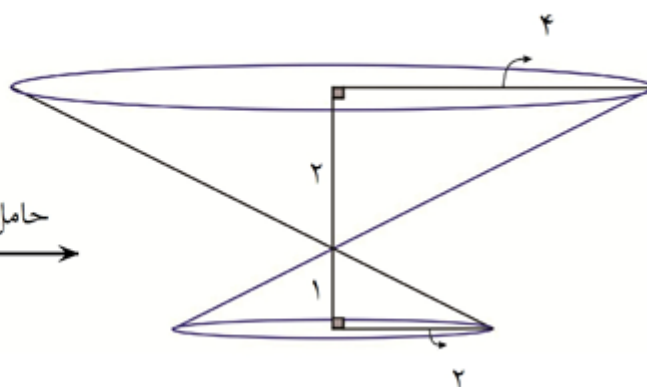
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{r}{4} b}{\frac{5}{4} b} = \frac{r}{5}$$

از دوران حاصل دو مخروط تشکیل می‌شود. ۳۱

x	-۲	۰	۴
y	-۲	-۱	۱



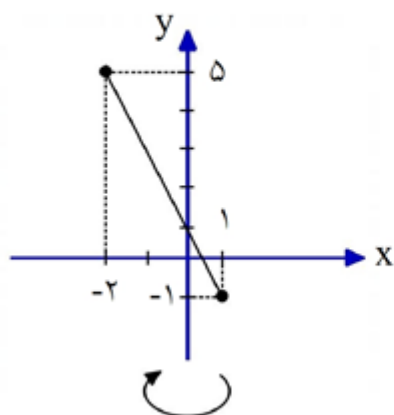
حامل دوران



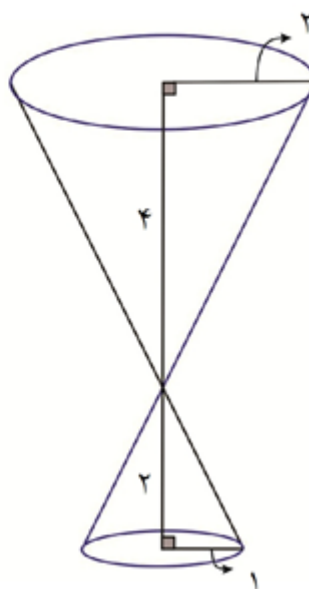
$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} + V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (2) + \frac{1}{3} \pi (2)^2 (1)$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

x	-۲	۰	۱
y	۵	۱	-۱

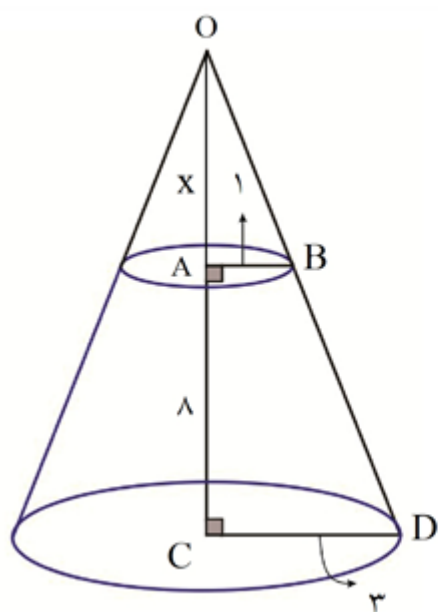
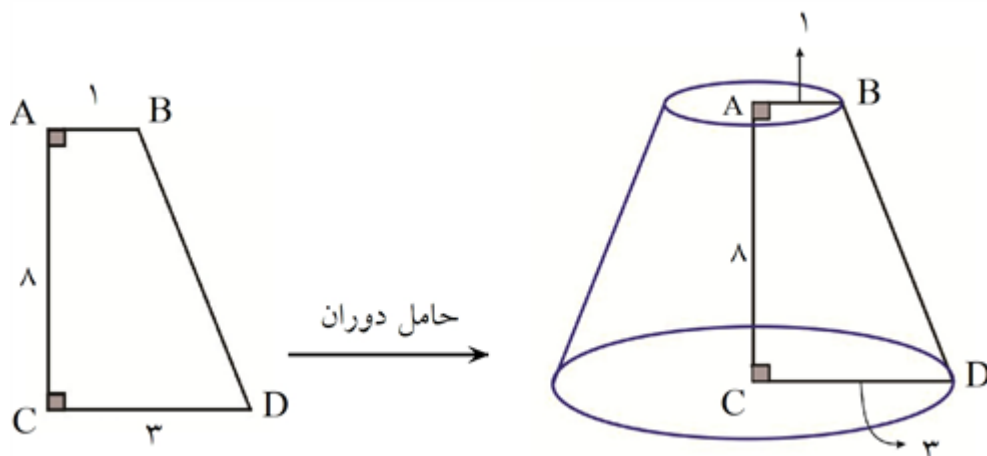


حامل دوران



$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} + V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3}\pi(2)^2(4) + \frac{1}{3}\pi(1)^2(2)$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{16\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} = 6\pi$$



$$\triangle OCD : AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OC = x + 1 = \frac{3}{2}$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3}\pi(3)^2(4) - \frac{1}{3}\pi(1)^2(\frac{1}{2})$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = 36\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{215\pi}{6}$$

وقتی خط دایره را قطع نمی‌کند یعنی خارج دایره قرار دارد و برای آنکه خط خارج دایره باشد، باید فاصله خط تا مرکز دایره را بزرگ‌تر از شعاع قرار دهیم.

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow O(2, -1)$$

$$d > R \Rightarrow \frac{|1 + 3 + m|}{5} > 2 \Rightarrow |m + 11| > 10$$

$$\Rightarrow m + 11 < -10 \text{ یا } m + 11 > 10 \Rightarrow m < -21 \text{ یا } m > -1$$

۳۵ الف) در معادله دایره باید ضریب x^2 و y^2 برابر باشد. بنابراین:

$$k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$$

برای آنکه $A(1, 3)$ روی محیط دایره باشد، باید $x = 1$ و $y = 3$ را درون معادله دایره قرار دهیم و حاصل برابر صفر است.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (1)^2 + (3)^2 + 4(1) - 6(3) + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 9 + 4 - 18 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = 5$$

(ب)

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 4y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3/2 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 3/2)$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

۳۶ الف) اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره باشد، به جای x و y اعداد -1 و 1 قرار می‌دهیم و حاصل برابر صفر است.

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1)^2 + (1)^2 - 2(-1) + 4(1) + 2k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2 + 4 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow 2k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$$

(ب)

$$O \begin{cases} h = \frac{-D}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ k = \frac{-E}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1 + 4 + 8} = \sqrt{13}$$

۳۷ اگر نقطه $A(1, 1)$ درون دایره باشد باید به جای x و y عدد یک قرار دهیم و حاصل کوچکتر از صفر باشد.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 1^2 - 4(1) + 2(1) + m < 0 \Rightarrow m < 0$$

۳۸ باید نقطه $(-8, 5)$ روی محیط دایره باشد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{-8 - 1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس می کنیم}} m' = 3$$

معادله خط مماس برابر است با:

$$y - y' = m'(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 3(x + 8) \Rightarrow y - 5 = 3x + 24 \Rightarrow y = 3x + 29$$

۳۹ الف) $\sqrt{2}$

(ب) $O(1, -3)$

$$O, O_r = \sqrt{(2+1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$O, O_r = R_1 + R_r \Rightarrow 5 = 3 + R_r \Rightarrow R_r = 2$$

ب)

$$O_r(-1, 5) \text{ و } R_r = 2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$$

$$x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 - x$$

در معادله دایره به جای y ، $x - 2$ قرار می‌دهیم.

$$x^2 + (-2-x)^2 + 2x - 2(-2-x) + 22 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 2x + 22 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 15 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -2 + 2 = 0 \Rightarrow A(-2, 0) \\ x = -4 \Rightarrow y = -2 + 4 = 2 \Rightarrow B(-4, 2) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{64} = 8 \text{ شعاع}$$

$$O(-1, -1) \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا خط} \quad d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 - 1 - 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{64 - 5} = 2\sqrt{59}$$

$$\frac{F(5, 1)}{F'(-7, 1)} \Rightarrow O\left(\frac{5+(-7)}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow O(-1, 1)$$

$$FF' = 2c = 5 - (-7) = 12$$

ب) معادله قطر کوچک بیضی برابر $x = -1$ است.

ج) فاصله A تا O برابر a است، بنابراین:

$$a = 9 - (-1) = 10 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

د)

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$$

$$S_{BFA} = \frac{b(a-c)}{2} = \frac{8(10-6)}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

