

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: جمع‌بندی تشریحی توابع نمایی و لگاریتمی یازدهم تجربی

۱ نمودارهای دو تابع $f(x) = 2^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ در نقطه‌ای به طول $x = -1$ متقاطع هستند، اگر $f(2) = \frac{1}{8}$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2^x + \log_x^2 = \frac{17}{4}$ ب) $25^{\log x} = 5 + 4 \times 5^{\log x}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2^x \times \log_3^x \times \log_4^x \times \log_5^x = \frac{2}{3}$

ب) $\frac{1}{1-4\log x} + \frac{4}{2+\log x} = 3$

۴ نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq -1$

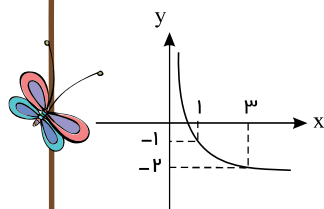
۵ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-1} = 9^{y+1} \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases}$$

۶ اگر $f(x) = 1 - 3^{-x}$ باشد، دامنه‌ی تابع‌های زیر را بیابید.

الف) $y = \sqrt{f(x)}$ ب) $y = \sqrt{xf(x)}$

۷ اگر نمودار تابع $y = a + \log_b^x$ بصورت مقابل باشد، ضابطه‌ی تابع را بیابید.



۸ دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log_4\left(\frac{2-x}{x^2-16}\right)$ ب) $f(x) = \log_{(x-2)}(100 - x^2)$

۹ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$A = \log_2 \sqrt[12]{25} \sqrt{5} - \log \sqrt[3]{27}$

۱۰ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log(x^2 + 3x - 4) = \log(5x - 1)$

ب) $\log_2(x+3) + 2\log_2^3 = \log_2(x+4) + \log_2^8$

۱۱ معادلات زیر را حل کنید.

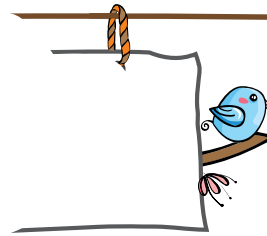
الف) $\log_3^x + \log_3^x + \log_3^x = 7$ ب) $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$

۱۲ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$9^x - 7 \times 3^x = 18$

۱۳ دامنه‌ی تابع زیر را بیابید.

$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$



۱۴ اگر $\log_{16} 2\sqrt{2} = x$ باشد، حاصل $\log_8 (x - \frac{1}{8})$ را بیابید.

۱۵ مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ی ۷٫۲ ریشتری چند ارگ است؟

۱۶ اگر $13ab = 4a^2 + 9b^2$ ، ثابت کنید:

$$\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

۱۷ حاصل عبارت زیر را بیابید. ([] جزء صحیح است)

$$A = [\log_3 100] - 2[\log_3 0.4]$$

۱۸ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

۱۹ اگر $\log_3 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x = -1$ باشد، آنگاه لگاریتم $x\sqrt{x}$ در پایه ی ۹ را بیابید.

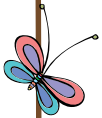
۲۰ تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 2}$$

۲۱ تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x-1}{x+3} \right)$$

۲۲ اگر $\log_{\frac{27}{16}} = a$ باشد، $\log_6^{16}$ را بر حسب a بیابید.



پاسخنامه تشریحی

$$x = -1 \rightarrow g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد } (-1, 2)$$

$$(-1, 2) \rightarrow f(x) = 2^{ax+b} \Rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow 2^{-a+b} = 2 = 2^1 \Rightarrow -a+b = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{2a+b} = 2^{-3} \rightarrow 2a+b = -3$$

$$\begin{cases} -a+b = 1 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} a-b = -1 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \Rightarrow 3a = -4 \rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$b = a+1 = -\frac{4}{3}+1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \rightarrow f(x) = 2^{-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}$$

$$\text{الف) } (5^2)^{\log x} = 5 + 2 \times 5^{\log x} \Rightarrow (5^{\log x})^2 - 2 \times 5^{\log x} - 5 = 0$$

با فرض $5^{\log x} = t$ داریم:

$$t^2 - 2t - 5 = 0 \rightarrow (t-5)(t+1) = 0 \rightarrow t = -1, t = 5$$

$$t = -1 \rightarrow 5^{\log x} = -1 \text{ غ ق ق } \log x = 1 \rightarrow \boxed{x = 10} \text{ جواب}$$

$$\text{ب) } \log_r^x + \frac{1}{\log_r^x} = \frac{17}{4} \Rightarrow \log_r^x = a \rightarrow a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4} \xrightarrow{\times 4a}$$

$$4a^2 + 4 = 17a \rightarrow 4a^2 - 17a + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 289 - 64 = 225$$

$$a = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, a = 4 \Rightarrow \log_r^x = \frac{1}{4} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \text{ جواب}$$

$$\log_r^x = 4 \rightarrow x = 2^4 = 16 \text{ جواب}$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\text{الف) } \log_r^x \times \log_{r^2}^x \times \log_{r^3}^x \times \log_{r^4}^x = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_r^x \times \frac{1}{2} \log_r^x \times \frac{1}{3} \log_r^x \times \frac{1}{4} \log_r^x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} (\log_r^x)^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow (\log_r^x)^4 = \frac{2}{3} \times 24 = 16 = 2^4$$

$$\log_r^x = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4 \text{ جواب}$$

$$\log_r^x = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} \log_r^x = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4 \\ \log_r^x = -2 \rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ جواب}$$

$$\text{ب) } \log x = t \rightarrow \frac{1}{1-4t} + \frac{4}{2+t} = 3 \Rightarrow \frac{2+t+4-16t}{(1-4t)(2+t)} = 3$$

$$3(2+t-4t-4t^2) = 6-15t \Rightarrow 6+3t-12t^2-12t^2 = 6-15t$$

$$12t^2 + 6t = 0 \Rightarrow t = 0, t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log x = 0 \rightarrow \boxed{x = 1} \text{ جواب}, \log x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{10}}} \text{ جواب}$$

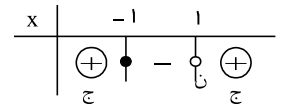
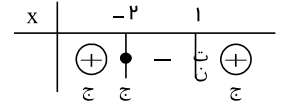
$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq \log_3 3^{-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{3} \geq 0$$

$$\frac{3x+3-x+1}{3(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+4}{3(x-1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq -2 \text{ یا } x > 1 \quad (1)$$

$$\text{شرط لگاریتم: } \frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow$$



$$x < -1 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \quad x \leq -2 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow \text{جواب} = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = (3^2)^{y+1} \Rightarrow 3^{\frac{x-1}{2}} = 3^{2y+2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2y+2$$

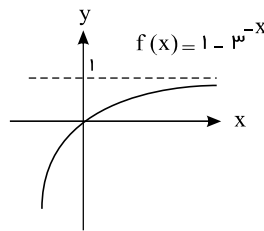
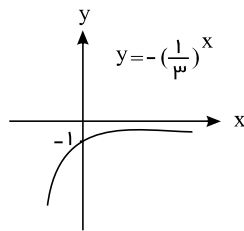
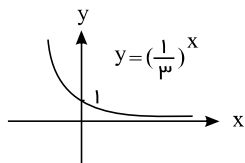
$$\Rightarrow x-1 = 4y+4 \rightarrow x = 4y+5 \quad (1)$$

$$\log(x+1) - \log y = 1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{y}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{y} = 10 \xrightarrow{(1)} \frac{4y+5+1}{y} = 10$$

$$\Rightarrow 10y = 4y+6 \rightarrow y = 1 \xrightarrow{(1)} x = 9$$

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b^a - \log_b^c$$

$$f(x) = 1 - 3^{-x} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$\text{الف } y = \sqrt{f(x)} \rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_y = [0, +\infty)$$

$$\text{ب } y = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x \leq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \quad \text{یا} \quad x \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$(1, -1) \rightarrow y = a + \log_b^x \Rightarrow -1 = a + \log_b^1 \Rightarrow -1 = a + 0 \rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$(3, -2) \rightarrow y = -1 + \log_b^x \Rightarrow -2 = -1 + \log_b^3 \Rightarrow \log_b^3 = -1 \Rightarrow b^{-1} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = 3 \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow y = -1 + \log_{\frac{1}{3}}^x$$

$$\text{الف } f(x) = \log_3\left(\frac{2-x}{x^2-16}\right) \rightarrow \frac{2-x}{x^2-16} > 0 \Rightarrow x = 2, 4, -4 \text{ ریشه ها}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$\frac{1}{2}-x$	+	+	•	-	-
$x^{\frac{1}{2}}-1$	+	•	-	-	+
$\frac{\frac{1}{2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-1}$	$\oplus$	$\frac{0}{0}$	-	$\oplus$	$\frac{0}{0}$

$$D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

$$\text{ب) } f(x) = \log_{(x-\frac{1}{2})}(1-x^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow 1-x^{\frac{1}{2}} > 0 \rightarrow x^{\frac{1}{2}} < 1 \rightarrow |x| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 < x < 1} \quad (1) \quad x - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{x > \frac{1}{2}} \quad (2) \quad x - \frac{1}{2} \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1, x \neq \frac{3}{2} \rightarrow D_f = (\frac{1}{2}, 1) - \{\frac{3}{2}\}$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$A = \log_{\sqrt{\frac{1}{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \times \frac{1}{5} - \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} - (-3) \times \frac{1}{\sqrt{5}} \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\text{الف) } \log(x^2 + 3x - 4) = \log(5x - 1) \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 5x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \rightarrow x = -1, x = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow \log(-6) = \log(-6) \rightarrow \text{غير قابل قبول}$$

$$x = 3 \Rightarrow \log 14 = \log 14 \rightarrow \boxed{x = 3} \text{ جواب}$$

$$\text{ب) } \log_9(x+3) + \log_9 3^x = \log_9 8(x+4) \Rightarrow \log_9 9(x+3) = \log_9 8(x+4)$$

$$\Rightarrow 9x + 27 = 8x + 32 \rightarrow \log_9^{9x} \rightarrow \boxed{x = 5} \text{ جواب}$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\text{الف) } \log_{\sqrt{r}}^x + \log_{\sqrt{r}}^x + \log_{\sqrt{r}}^x = y \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \log_r^x + \frac{1}{\sqrt{r}} \log_r^x + \log_r^x = y$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} + 1) \log_r^x = y \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{r}} \log_r^x = y \Rightarrow \log_r^x = \frac{y\sqrt{r}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{y\sqrt{r}}{2}} = 16 \text{ جواب}$$

$$\text{ب) } \log_9(\log_9(\log_9^x)) = 0 \Rightarrow \log_9(\log_9^x) = 9^0 = 1 \Rightarrow \log_9^x = 3$$

$$\Rightarrow x = 2^3 = 8 \text{ جواب}$$

$$9^x - 7 \times 3^x - 18 = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 7 \times 3^x - 18 = 0$$

$$t^2 - 7t - 18 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+2) = 0 \rightarrow t = 9, t = -2$$

$$3^x = -2 \text{ غ ق ق } , 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\text{با فرض } 3^x = t \text{ داریم:}$$

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{\log(\frac{5x-x^2}{4})} \text{ شرط لگاریتم: } \frac{5x-x^2}{4} > 0 \Rightarrow 5x-x^2 > 0 \rightarrow x(5-x) > 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & 5 \\ \hline x(5-x) & - & \oplus & - \end{array} \rightarrow 0 < x < 5 \quad (1)$$

شرط رادیکال: $\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow \log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right) \geq \log 1 \xrightarrow{1 \geq 1} \frac{5x-x^2}{4} \geq 1$
 $\Rightarrow 5x-x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2-5x+4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 1 & 4 \\ \hline x^2-5x+4 & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_f = [1, 4]$$

۱۴
 $\log_b^{a_n} = \frac{n}{m} \log_b^a$

$$\log_{1/2} \sqrt{2} = \log_{1/2} 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = \log_{1/2} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \log_{1/2} 2 = \frac{3}{4} = x$$

$$\log_8 \left(x - \frac{1}{8}\right) = \log_8 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right) = \log_8 \frac{1}{4} = \log_{1/2} 2^{-2} = -2 \times \frac{1}{3} \log_{1/2} 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\log E = 11.8 + 1.5M = 11.8 + 1.5 \times 7.2 = 22.6$$

$E = 10^{22.6}$ ارج

۱۵

۱۶
 $\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \quad \log_b^{a_n} = \frac{n}{m} \log_b^a$

$$4a^2 + 9b^2 = 13ab \xrightarrow{+12ab} 4a^2 + 9b^2 + 12ab = 13ab + 12ab$$

$$\Rightarrow (2a+3b)^2 = 25ab \Rightarrow \frac{(2a+3b)^2}{25} = ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2 = ab \rightarrow \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2 = \log(ab)$$

$$\Rightarrow 2 \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \log a + \log b \Rightarrow \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

۱۷
 $\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$

$$3^4 < 100 < 3^5 \Rightarrow \log_3 3^4 < \log_3 100 < \log_3 3^5 \rightarrow 4 < \log_3 100 < 5$$

$$\Rightarrow [\log_3 100] = 4$$

$$0.1 < 0.04 < 0.1 \Rightarrow 10^{-2} < 0.04 < 10^{-1} \Rightarrow \log 10^{-2} < \log 0.04 < \log 10^{-1}$$

$$\Rightarrow -2 < \log 0.04 < -1 \Rightarrow [\log 0.04] = -2$$

$$A = [\log_3 100] - 2[\log 0.04] = 4 - 2(-2) = 8$$

$$\log x + \log y = 1 \rightarrow \log(xy) = 1 \Rightarrow xy = 10 \Rightarrow \boxed{y = \frac{10}{x}}$$

$$x^2 + y^2 = 29 \Rightarrow x^2 + \frac{100}{x^2} = 29 \Rightarrow x^4 + 100 = 29x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 29x^2 + 100 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 25) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \rightarrow y = \frac{10}{x} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x^2 - 25 = 0 \rightarrow x = \pm 5 \xrightarrow{x > 0} x = 5 \rightarrow y = \frac{10}{x} = \frac{10}{5} = 2$$

۱۸

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c$$

$$\log_b^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_r \sqrt{x} + \log_{r^{-1}} x = -1 \Rightarrow \log_r x^{\frac{1}{r}} - \log_r x = -1 \Rightarrow \frac{1}{r} \log_r x - \log_r x = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r} \log_r x = -1 \Rightarrow \log_r x = r \rightarrow x = r^r = 9$$

$$\log_9 x \sqrt{x} = \log_9 9 \sqrt{9} = \log_9 9 \times 9^{\frac{1}{r}} = \log_9 9^{\frac{r}{r}} = \frac{r}{r} \log_9 9 = \frac{r}{r}$$

$$\text{الف) } f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow \frac{r^{x_1} - 1}{r^{x_1} + r} = \frac{r^{x_r} - 1}{r^{x_r} + r}$$

$$\Rightarrow r^{x_1+x_r} + r \times r^{x_1} - r^{x_r} - r = r^{x_1+x_r} + r \times r^{x_r} - r^{x_1} - r$$

$$\Rightarrow r \times r^{x_1} = r \times r^{x_r} \Rightarrow x_1 = x_r \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

$$y = \frac{r^x - 1}{r^x + r} \Rightarrow r^x - 1 = y \times r^x + ry \Rightarrow r^x - y \times r^x = ry + 1$$

$$(1 - y) \times r^x = ry + 1 \Rightarrow r^x = \frac{ry + 1}{1 - y} \Rightarrow x = \log_r \left(\frac{ry + 1}{1 - y} \right)$$

$$y = f^{-1}(x) = \log_r \left(\frac{rx + 1}{1 - x} \right)$$

$$f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow \log_r \left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + r} \right) = \log_r \left(\frac{x_r - 1}{x_r + r} \right) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 + r} = \frac{x_r - 1}{x_r + r}$$

$$\Rightarrow x_1 x_r + r x_1 - x_r - r = x_1 x_r - x_1 + r x_r - r \Rightarrow r x_1 = r x_r$$

$$\Rightarrow x_1 = x_r \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

$$y = \log_r \left(\frac{x - 1}{x + r} \right) \Rightarrow \frac{x - 1}{x + r} = r^y \Rightarrow \frac{x + r - r}{x + r} = r^y$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{r}{x + r} = r^y \Rightarrow 1 - r^y = \frac{r}{x + r} \Rightarrow x + r = \frac{r}{1 - r^y}$$

$$x = \frac{r}{1 - r^y} - r = \frac{r - r + r \times r^y}{1 - r^y} = \frac{1 + r \times r^y}{1 - r^y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 + r \times r^x}{1 - r^x}$$

$$\log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_{1r}^{2r} = a \Rightarrow \frac{\log r^2}{\log(r \times r^2)} = a \Rightarrow \frac{2 \log r}{\log r + 2 \log r} = a$$

$$2 \log r = a \log r + 2a \log r \Rightarrow (2 - a) \log r = 2a \log r \Rightarrow \log r = \left(\frac{2a}{2 - a} \right) \log r$$

$$\log_r^{16} = \frac{\log r^4}{\log r \times r} = \frac{4 \log r}{\log r + \log r} = \frac{4 \log r}{2 \log r} = \frac{4 \log r}{2 \log r} = \frac{4 \log r}{2 \log r}$$

$$= \frac{4}{\frac{r-a+2a}{r-a}} = \frac{4(r-a)}{a+r} = \frac{4r-4a}{a+r}$$