

نام و یاد خدا

"مقاطع مخروطی"

(۱) اندازه قطر بزرگ و کوچک یک بیضی قائم $۶ و ۴$ است. اگر مرکز بیضی (۱-۱) باشد مطلوب است:

الف) فاصله کانونی و خروج از مرکز این بیضی:

ب) مختصات نقاط دوسر قطر کوچک، قطر بزرگ و کانون بیضی:

(۲) در یک بیضی مختصات دوسر قطر بزرگ نقاط (۲ و ۳-) و (۶ و ۱) می باشد اگر مختصات یکی از دوسر قطر کوچک نقطه (۴ و ۱) باشد. طول قطر کوچک، فاصله کانونی و خروج از مرکز این بیضی را بدست آورید:

۳) قانون مرکز بیضی نقاط $(2, 4)$, $(-4, 2)$ است.

الف) فاصله قانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید:

ب) اگر $a=4$ باشد اندازه قطر کوچک و فوج از مرکز بیضی را مشخص کنید:

۴) مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دایره را بیابانید پس دایره را رسم کنید و محل تقاطع هر دایره با محورهای مختصات را در صورت وجود مشخص کنید:

الف) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$

ب) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

ج) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

(۵) دایره‌ای به معادله $x^2 + (y-2)^2 = 5$ روی خط $y = -x + 1$ وتر AB را جدا می‌کند
طول وتر AB را بدست آورید:

(۶) اگر خطی در نقطه $(-4, -3)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مماس باشد معادله
خط مماس را بنویسید:

(۷) متخفّر کنید در دو حالت دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 40$

(ب) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$ و $x^2 + y^2 - 6x - 4y = -11$

۸) وضعیت نقاط $(-۲-۱)$ $(۳-۶)$ $(۰-۰)$ (اذا) را نسبت به دایره به معادله

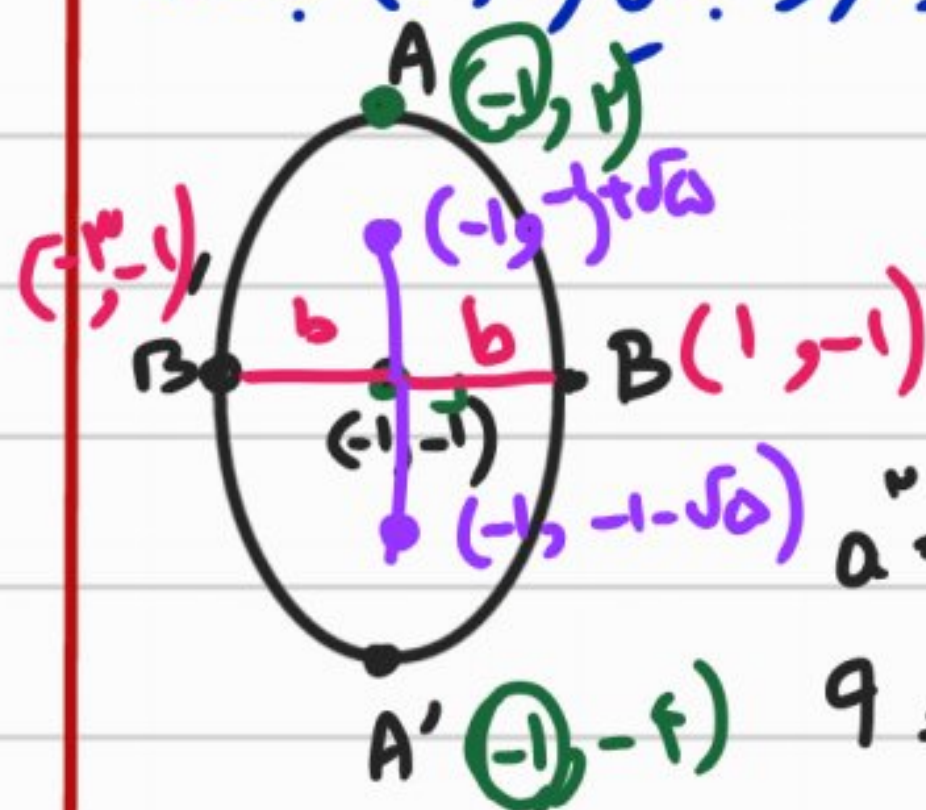
$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 3$$

محقق کنید:

۹) معادله دایره را بنویسید که مرکز آن $(۰-۲)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 9 = 0$ مماس در دو نقطه باشد:

"مقاطع مخروطی"

۱) اندازه قطر بزرگ و کوسید یک بیضی قائم ۶ و ۴ است. اگر مرکز بیضی $(-۱, -۱)$ باشد مطلوب است:



$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

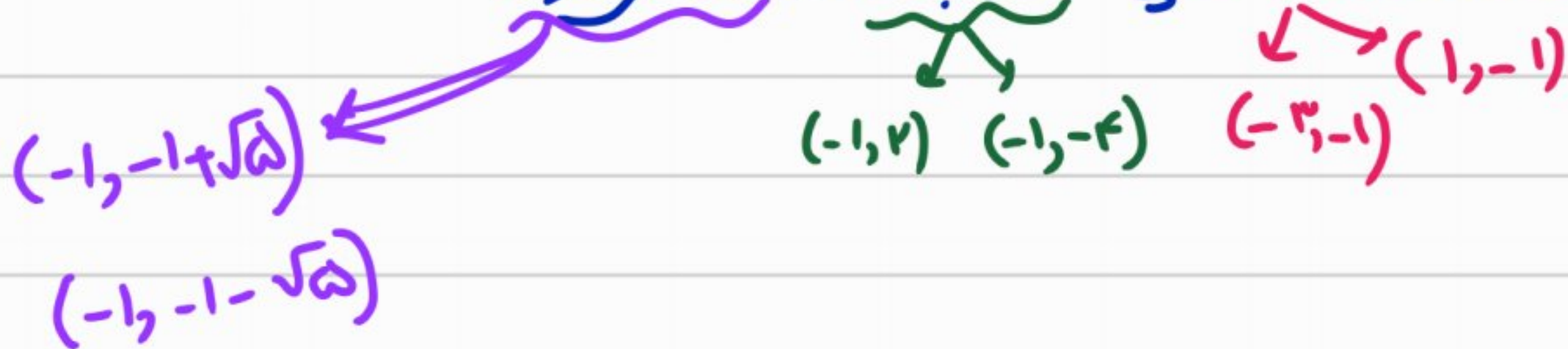
$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

الف) فاصله کانونی و خروج از مرکز این بیضی:

$$2c = 2\sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ب) مختصات نقاط دوسر قطر کوسید، قطر بزرگ و کانون بیضی:



۲) در یک بیضی مختصات دوسر قطر بزرگ نقاط $(-۳, ۲)$ و $(۱, ۶)$ می باشد اگر مختصات یکی از دوسر قطر کوسید نقطه $(۱, ۴)$ باشد طول قطر کوسید، فاصله کانونی و خروج از مرکز این بیضی را بدست آورید:

$$e = \frac{c}{a} \quad 2c = 2 \times 2 = 4 \quad 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$x_0: \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

$$y_0: \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \rightarrow O: (-1, 3)$$

$$2a = AA' = \sqrt{(1+3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$OB = b = \sqrt{(1+1)^2 + (4-3)^2} = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 16 = 4 + c^2 \rightarrow c = 2 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



۳) قانون مرکز بیضی نقاط $(2, 4)$ و $(2, -4)$ است

$$FF' = 2c$$

الف) فاصله قانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$x = 2$$

ب) اگر $a = 4$ باشد اندازه قطر کوچک و فوج از مرکز بیضی را مشخص کنید:

$$FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (-4-4)^2} = 8 = 2c \rightarrow c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$16 = b^2 + 16$$

$$b = 2\sqrt{5}$$

قطر کوچک: $2b = 4\sqrt{5}$

$$x_0 = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$$y_0 = \frac{-4 + 4}{2} = 0 \rightarrow O: (2, 0)$$

لیسه دهی

۴) مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دایره را بیابانید پس دایره را رسم کنید و محل تقاطع

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

هر دایره با محورهای مختصات را در صورت وجود مشخص کنید:

فرم: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مرکز: $O: (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

الف) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$ مرکز: $O: (-2, 3)$ $R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 - 4(-5)} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 20} = 3\sqrt{2}$

$$y^2 - 6y - 5 = 0 \rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x = -5$$

فرم: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ مرکز: $O: (1, 2)$ $R = 3$

ب) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

$$(x-1)^2 + 4 = 9$$

$$(x-1)^2 = 5$$

$$1 + (y-2)^2 = 9$$

$$(y-2)^2 = 8 \rightarrow y-2 = \pm\sqrt{8}$$

$$y = \sqrt{8} + 2$$

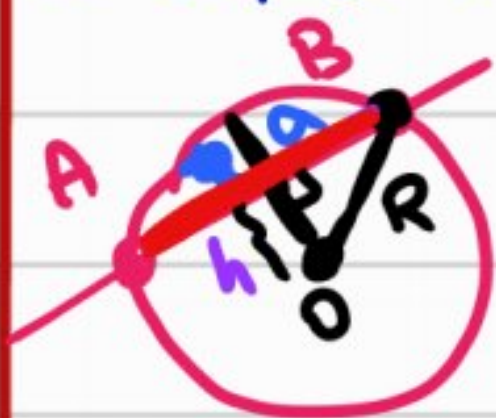
$$y = -\sqrt{8} + 2$$

ج) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$$x-1 = \pm\sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} + 1 \text{ و } -\sqrt{5} + 1$$

(۵) دایره‌ای به معادله $x^2 + (y-2)^2 = 5$ و خط $y = -x + 1$ وتر AB را پیدا کنید. معنی: $x + y - 1 = 0$



$R = \sqrt{5}$
 $h = \frac{|0 + 2 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

طول وتر AB را بدست آورده: $O(0, 2)$

$AB = 2a = 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$R^2 = h^2 + a^2$

$5 = \frac{1}{2} + a^2 \rightarrow a^2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۶) اگر خط در نقطه $(-4, -3)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس باشد معادله



خط مماس را بنویسید: $\frac{-4-x}{-2} = \frac{-3-y}{-1}$ $y = ax + b$

$(-4, -3)$ و $a = -\frac{3}{4}$ $y = -\frac{3}{4}x + b$

$-3 = -\frac{3}{4}(-4) + b \rightarrow -3 = 3 + b \rightarrow b = -6$

$y = -\frac{3}{4}x - 6$

(۷) متحرک در دو حالت دو دایره نسبت به هم چه وضع دارند؟

الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 40$

$O: (-1, 2)$

$O': (1, -2)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 40} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

$OO' = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$R + R' = \sqrt{5} + 2\sqrt{15} = 4\sqrt{5}$
 $R - R' = 2\sqrt{15} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -11$

$O: (-1, -2)$

$O': (2, 2)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 52} = \frac{1}{2} \sqrt{72} = 3\sqrt{2}$

$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 44} = \frac{1}{2} \sqrt{-24}$

$R' = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$R + R' = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$OO' = \sqrt{\left(\frac{-1-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2-2}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}$

مماس بودن

۸) وضعیت نقاط $(-2, -1)$ ^A $(3, -4)$ $(0, 0)$ (ادامه) نسبت به دایره به مطالعه

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 3$$

$$O: (2, -3)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{14 + 34 + 12} = 4$$

$$AO = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$

$AO < R$ درون دایره

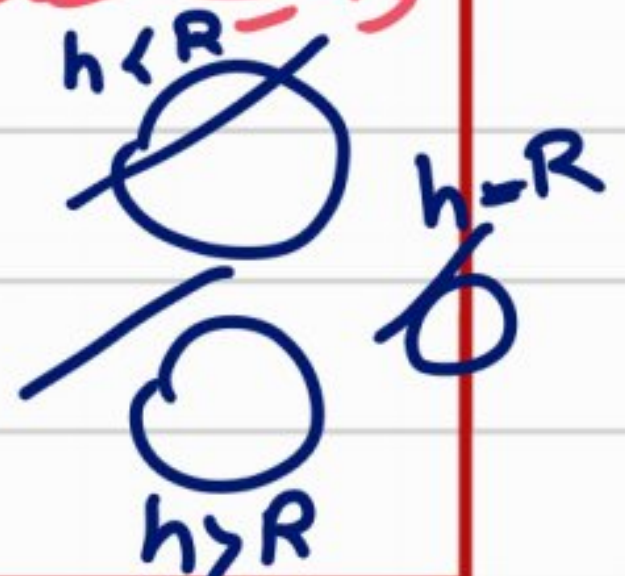
$AO = R \rightsquigarrow$ مرز دایره

$AO > R \rightsquigarrow$ بیرون دایره

$AO < R \rightsquigarrow$ درون دایره

منبع
 $ax + by + c = 0$
 $O(a, b)$
 R
 $h = \frac{|a(a) + b(b) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

وضعیت خط و دایره



۹) معادله دایره را بنویسید که مرکز آن $(2, 0)$ و دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 9 = 0$ را درون

$$R - R' = OO'$$

$$O': (2, 3)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{14 + 34 - 34} = 2$$

$$OO' = \sqrt{0^2 + 4} = 2$$

$$R - 2 = 2$$

$$R = 4$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 0 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 0 = 0$$

نیم دایره

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

$$O: (1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$x^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

$$O': (-2, 1)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 - 12} = 1$$

$$OO' = \sqrt{\left(\frac{1+2}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2-1}{9}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

