

"مثلاًت"

بانا ویا د خدا

شاد و بخودار را شادای :

(۱) دوره شاد و مقادیر مانع و منیم هر یک از توابع زیر را بدست آورید :

الف) $y = -2 + 5 \sin 4x$

ب) $y = \sqrt{2} - 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

ج) $y = 3\sqrt{2} \sin\left(-\frac{1}{3}x\right)$

د) $y = -\pi \cos(2x) - 1$

ه) $y = 3 + \sqrt{2} \tan(x)$

(۲) دوره شاد هر یک از توابع زیر را بدست آورید و بخودار آنها را در یک دوره شاد رسم کنید :

الف) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

ب) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow y = r + \sin(r_n)$$

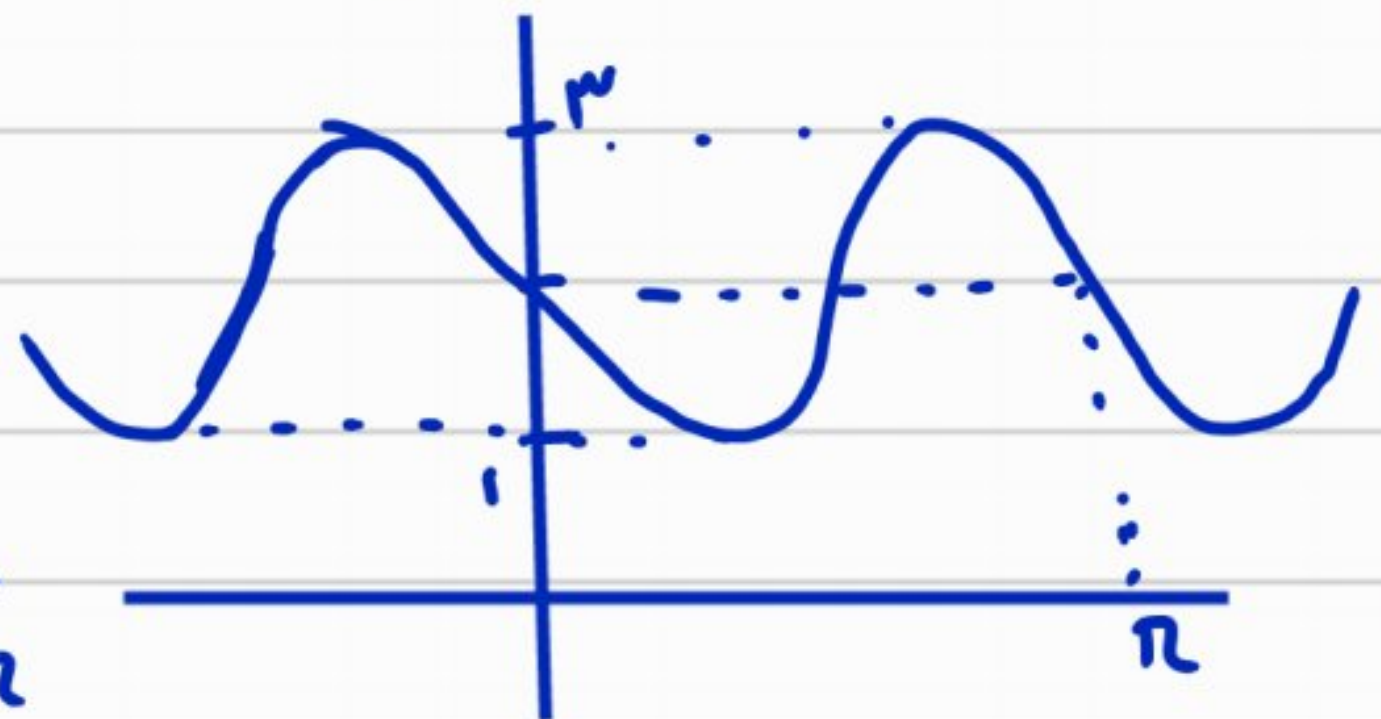
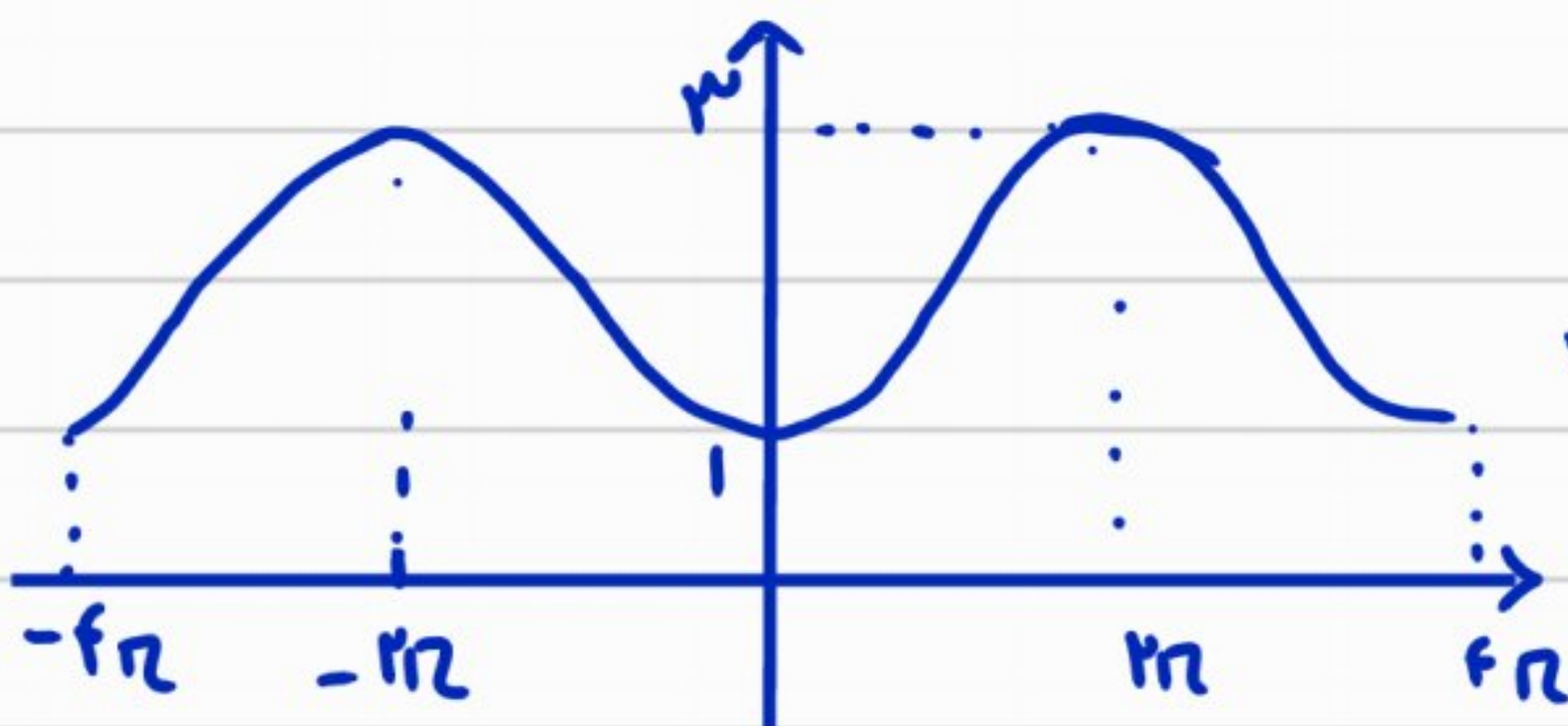
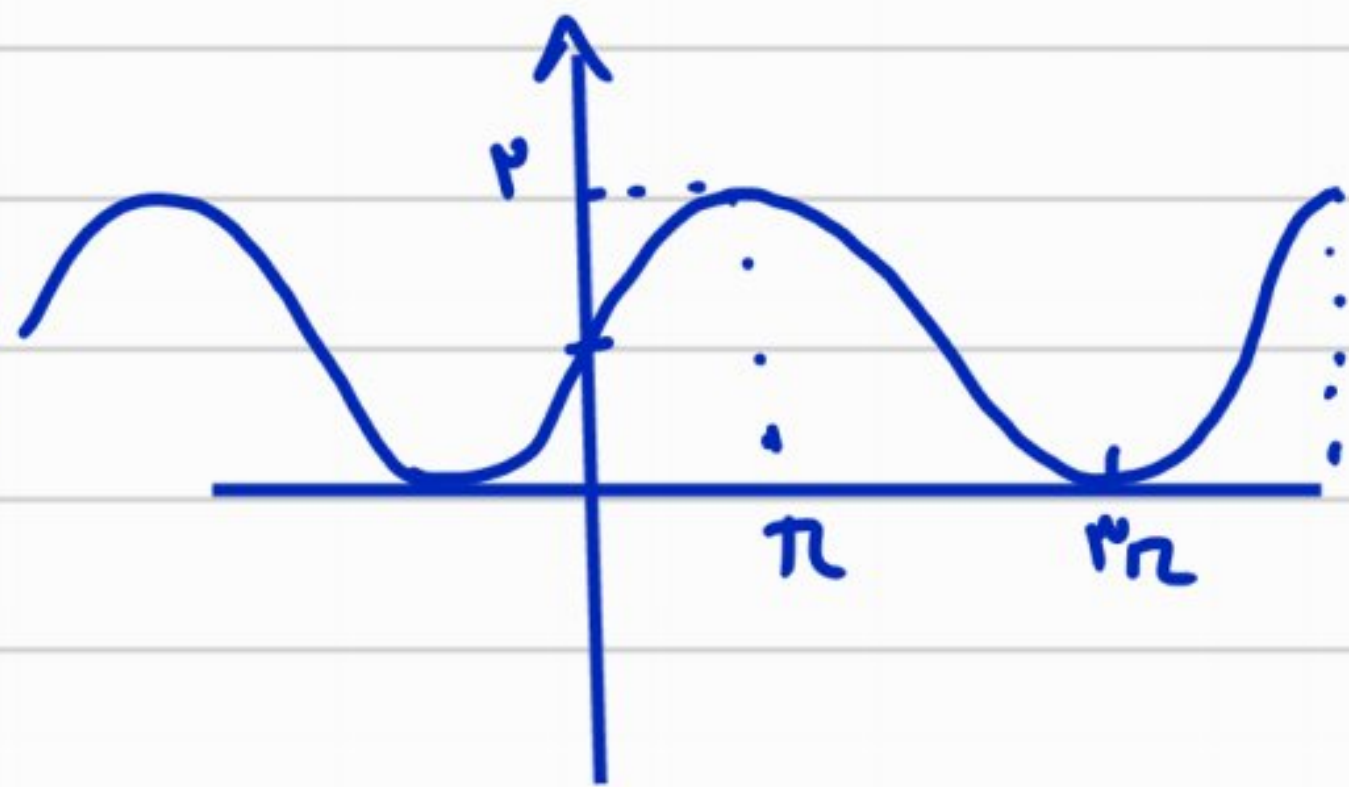
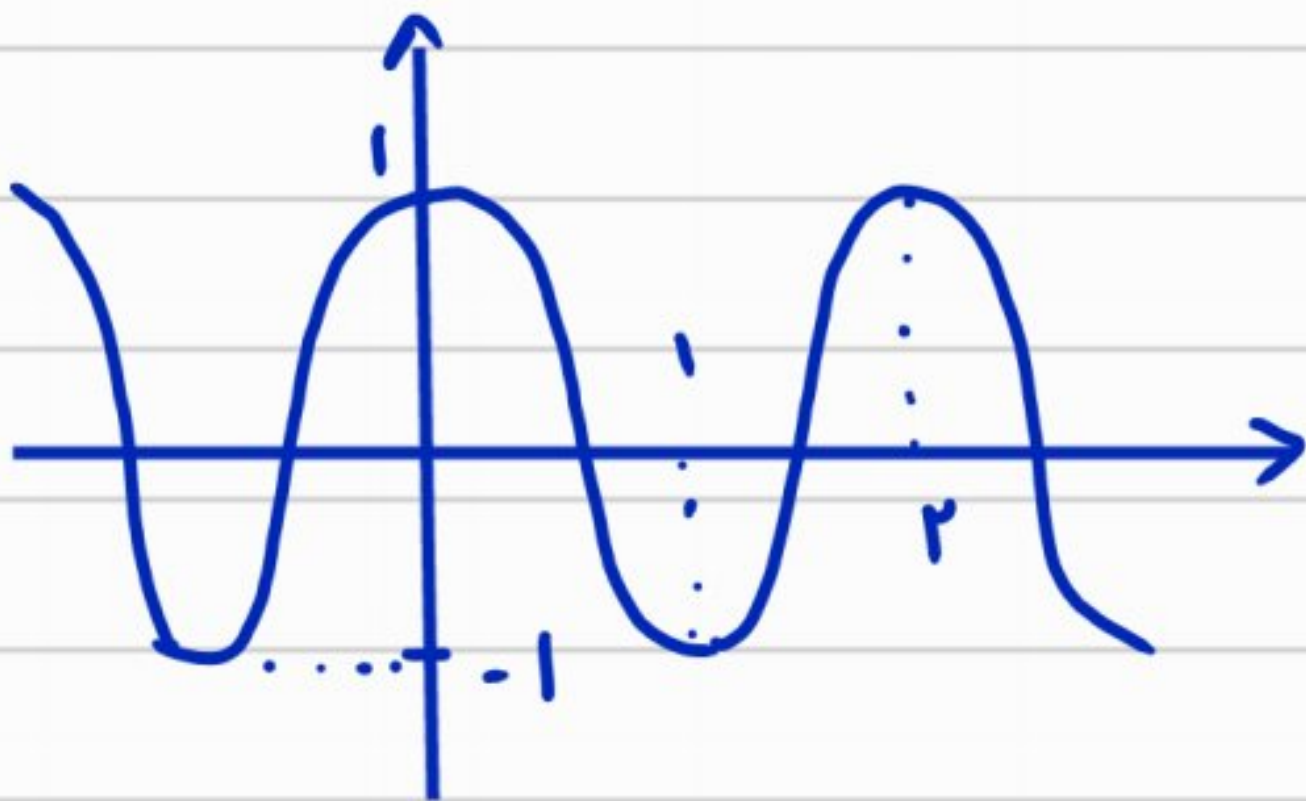
(۳) هکت از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظر کنید :

$$۱) y = \cos(\pi n)$$

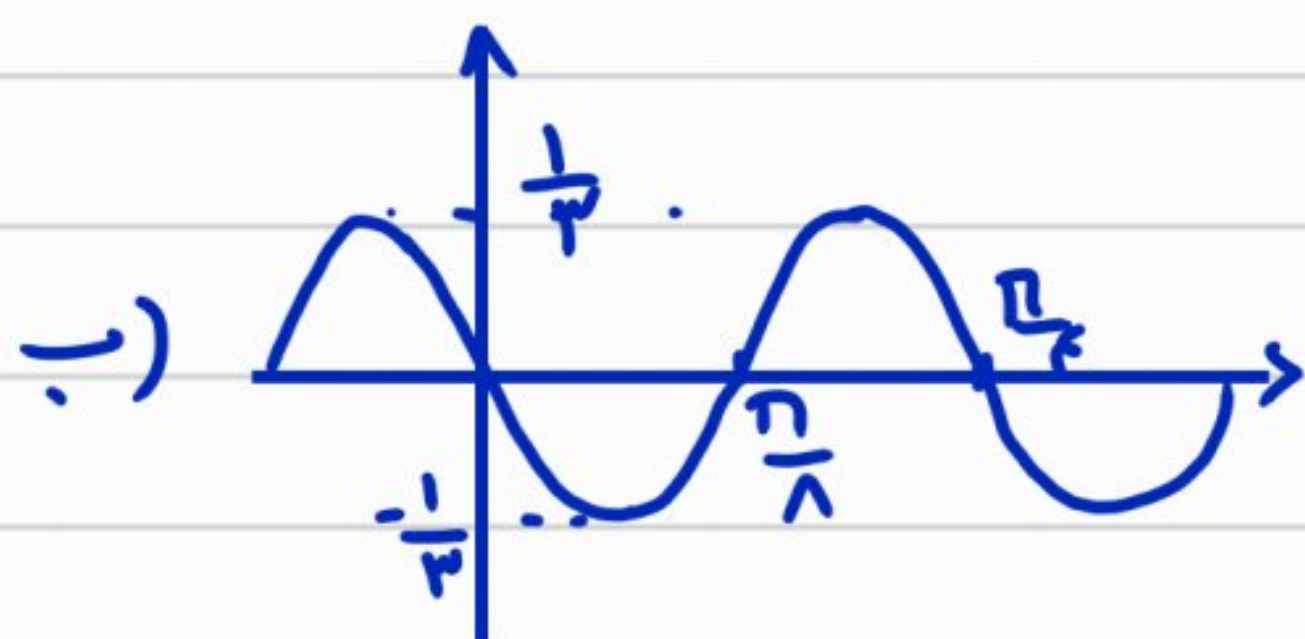
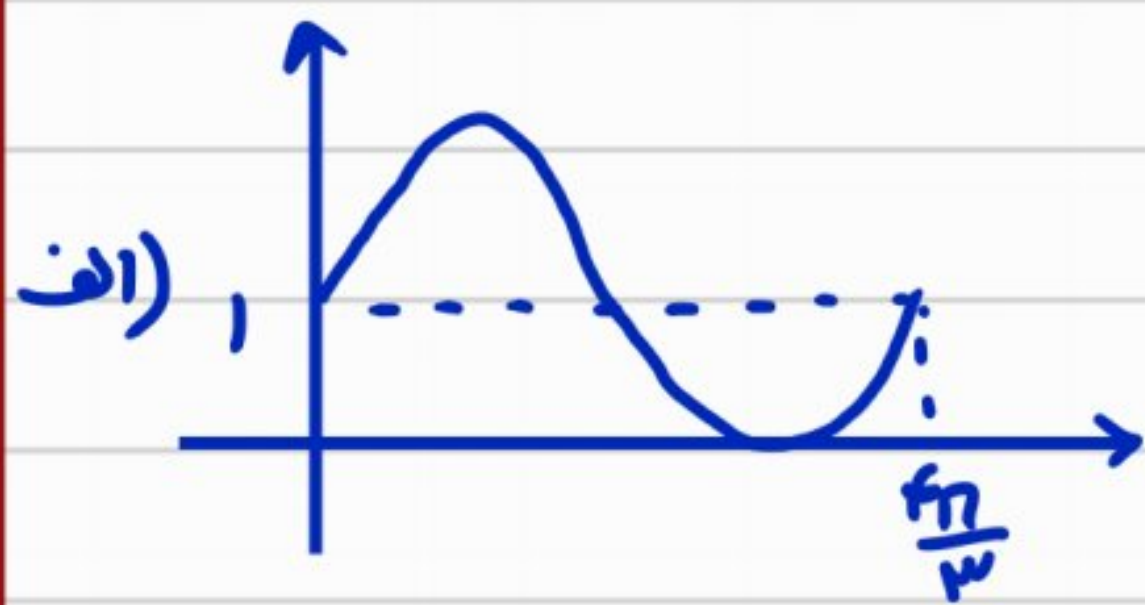
$$۲) y = r - \sin(r_n)$$

$$۳) y = r - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)$$

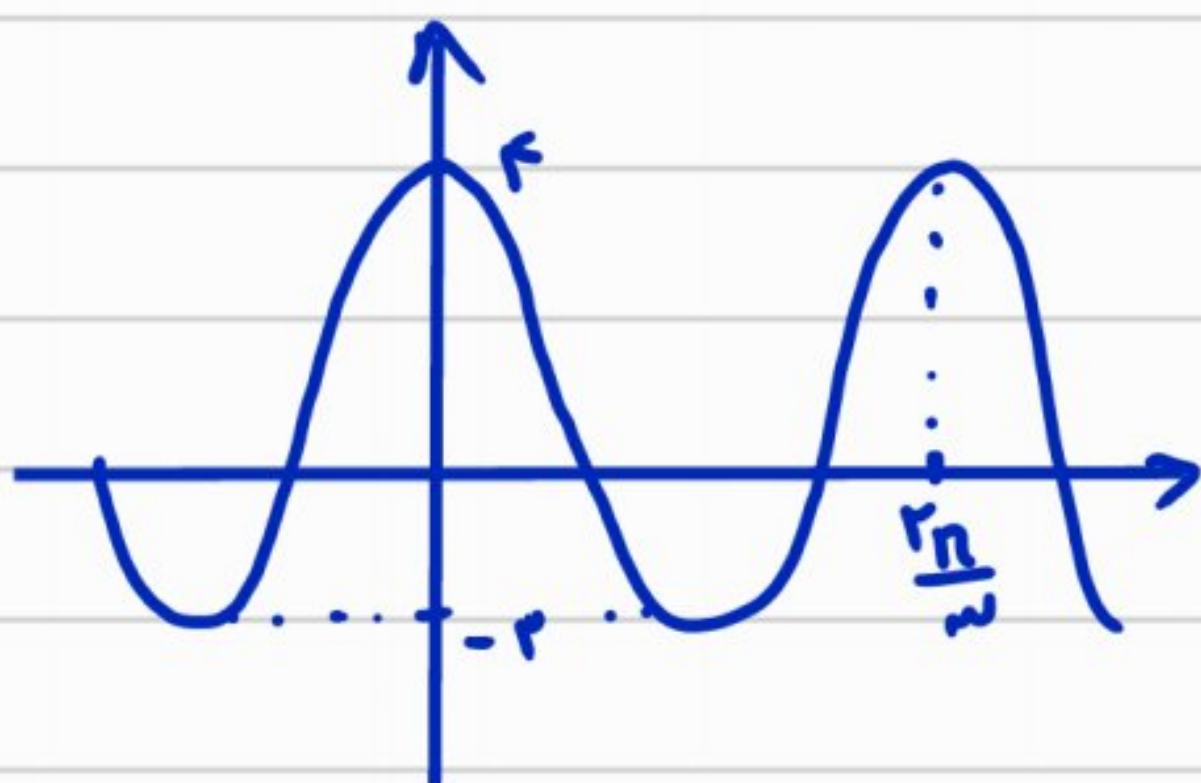
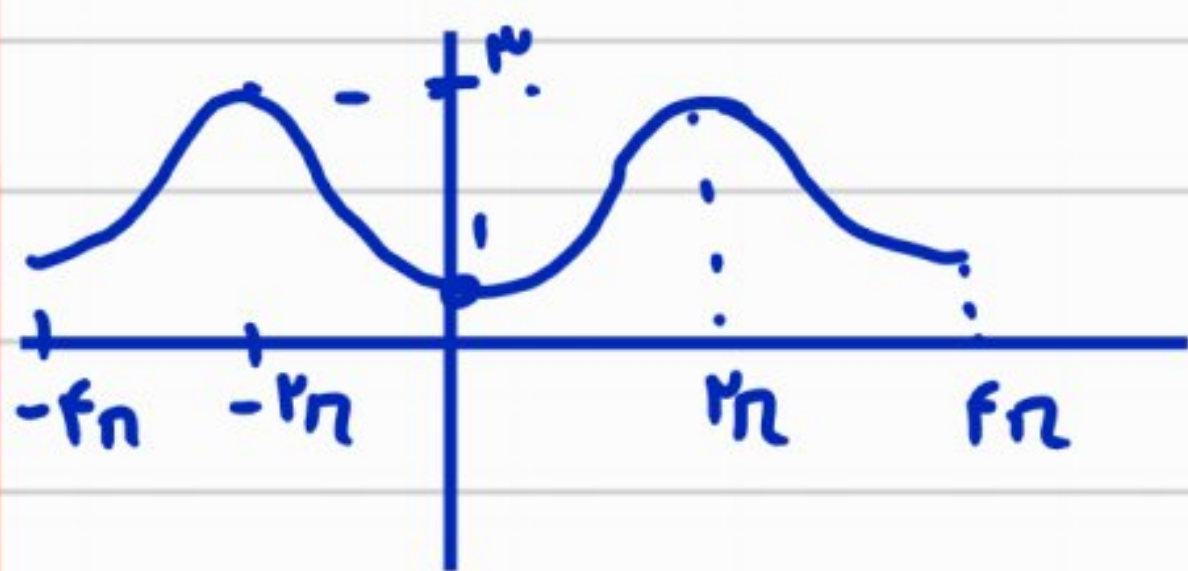
$$۴) y = \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) + 1$$



(۴) قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ رسم شده است. مقادیر a و b و c را تعیین کنید.



(۵) ضابطه مربوط به یک نمودار داده شده است. صورت $y = a \cos(bx) + c$ است. ضابطه را بنویسید.



نسب‌های مثلثاتی زوایای دوبرابر همان :

(۶) مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

(۷) اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه‌ای تند باشد حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید:

$$\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha$$

(۸) فرض کنید $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید:

(۹) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید:

۱۰) درستی سادها را زیر آئینب كنند :

الف) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \tan \alpha$

ب) $\frac{2 \sin n \cos n}{\cos^2 n - \sin^2 n} = \tan 2n$

ج) $\frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin^2 \alpha$

۱۱) اگر $\frac{\sin^2 n}{1 - \cos^2 n} = 3$ باشد مقادیر صبت $\sin n$ و $\cos n$ را بدست آورید.

معادلات مثلثاتی :

(۱۳) هر يك معادلات زیر را حل كنيد :

الف) $2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ج) $\sin^2 x + \sin^2 x = 0$

د) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) = 0$

ه) $\cos x (2\cos x + 1) + 1$

$$ج.) (1 + \tan^2 x) \cos^3 x + 1 = 2 \sin^2 x$$

۱۳ خط $y = \frac{1}{2}$ خود را، ربع $y = \cos 2x$ را در می‌نماید قطع می‌کند.

مدرس: نسیمه دهنوی

$y = a \sin(bx) + c$
 $\max: |a| + c$
 $\min: -|a| + c$
 $T = \frac{2\pi}{|b|}$

بامان و یار خدا

شاد و بخودار را شاد می:

$y = a \tan bx + c$

$T = \frac{\pi}{|b|}$

(۱) دوره شاد و مقادیر ماکزیم و مینیم هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = -\frac{2}{c} + 5 \sin 4x \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$, $\max = 5 - 2 = 3$
 $\min = -5 - 2 = -7$

ب) $y = \sqrt{2} - 3 \cos(\frac{\pi}{4}x) \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$, $\max = 3 + \sqrt{2}$
 $\min = -3 + \sqrt{2}$

ج) $y = 3\sqrt{2} \sin(-\frac{1}{3}x) \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 6\pi$, $\max = 3\sqrt{2}$
 $\min = -3\sqrt{2}$

د) $y = -\pi \cos(2x) - 1 \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$, $\max = \pi - 1$
 $\min = -\pi - 1$

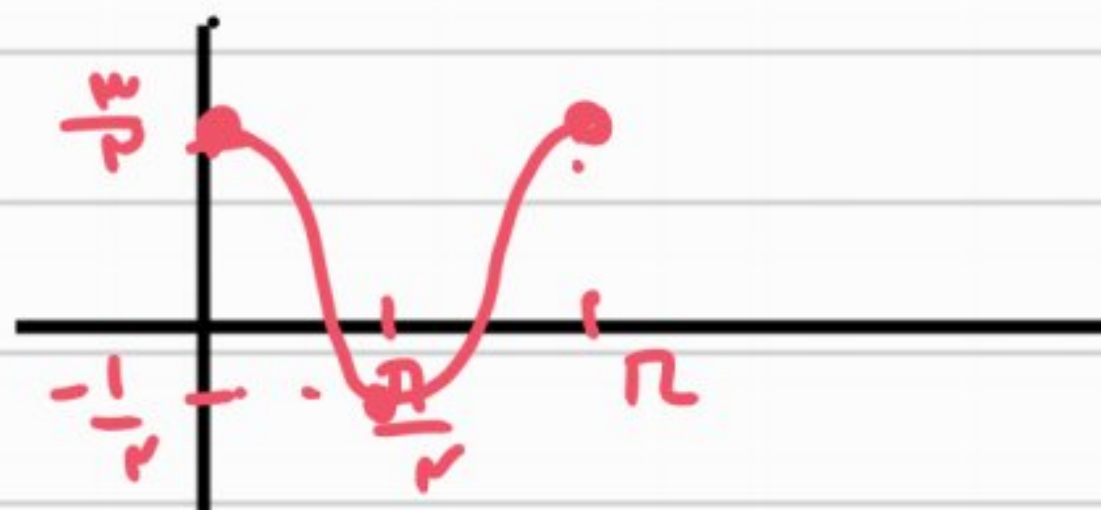
ه) $y = 3 + \sqrt{2} \tan(x) \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{|1|} = \pi$



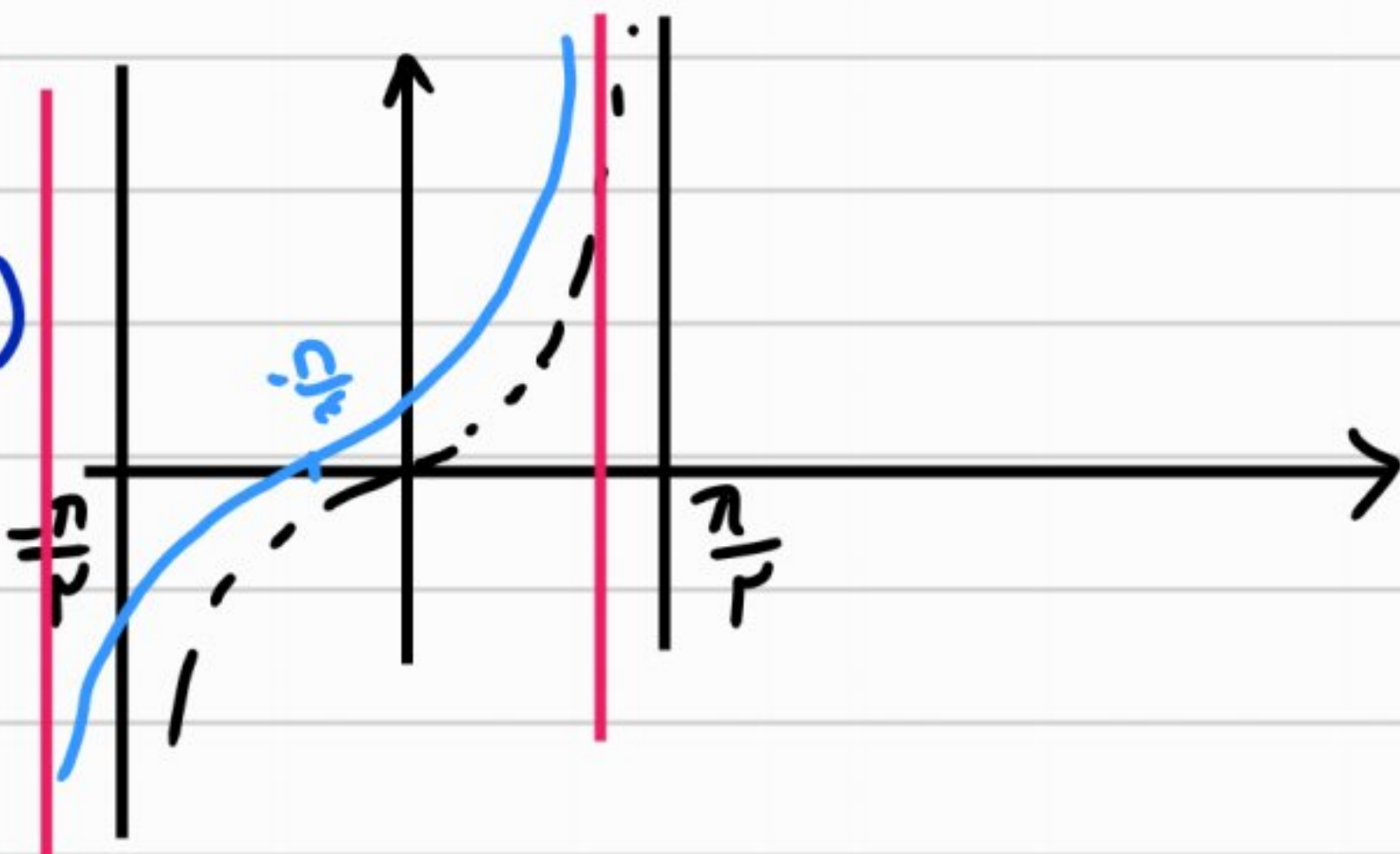
(۲) دوره شاد هر یک از توابع زیر را بدست آورید و بخودار آه را در یک دوره شاد رسم کنید:

الف) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$, $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$



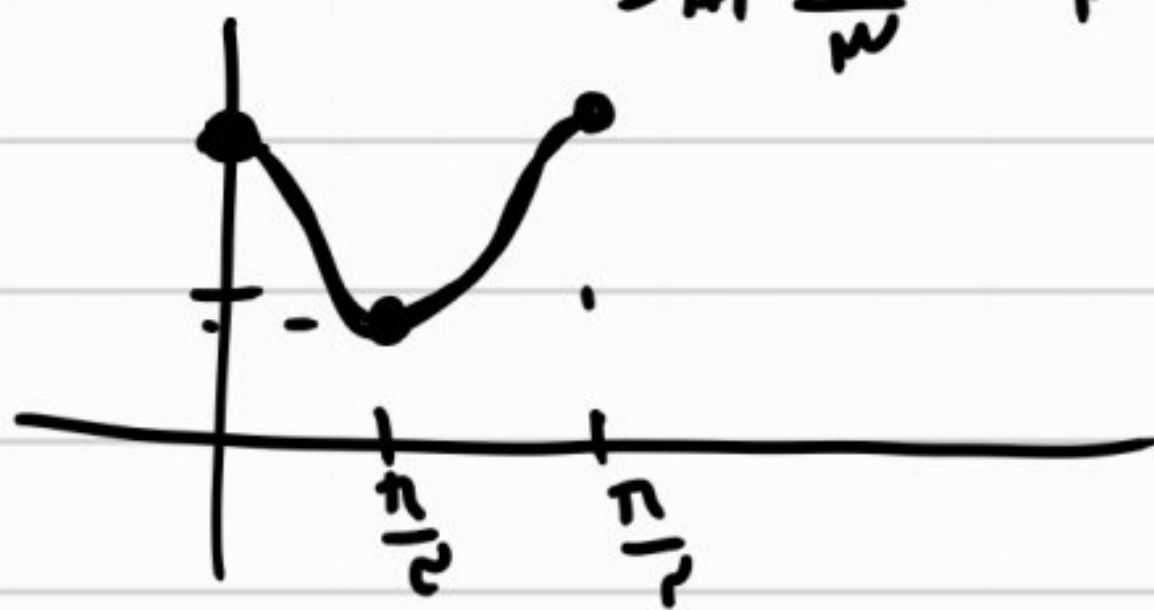
ب) $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$



$$\Rightarrow y = r + \sin(\frac{r}{r}n)$$

$$T = \frac{r\pi}{r} = \frac{\pi}{r}$$

$$\sin \frac{r\pi}{r} - \frac{\sqrt{2}}{r} = \frac{r-\sqrt{2}}{r}$$



(۳) هکت از توابع داده شده را با نمودار زیر نظر کنید:

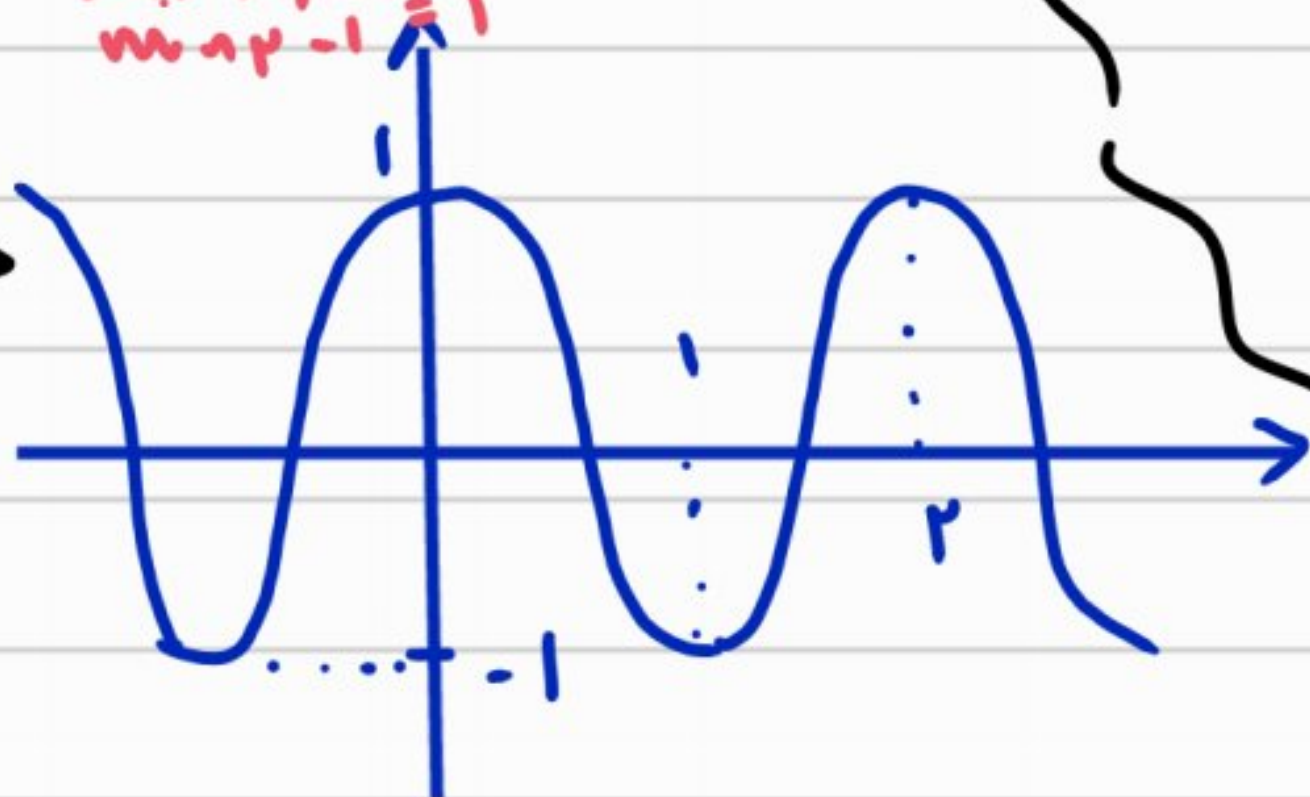
max: 1
min: -1

$$1) y = \cos(\pi n)$$

$$2) y = r - \cos(\frac{\pi}{r})$$

$$\text{Max } r+1 = r$$

$$\text{Min } r-1 = 1$$

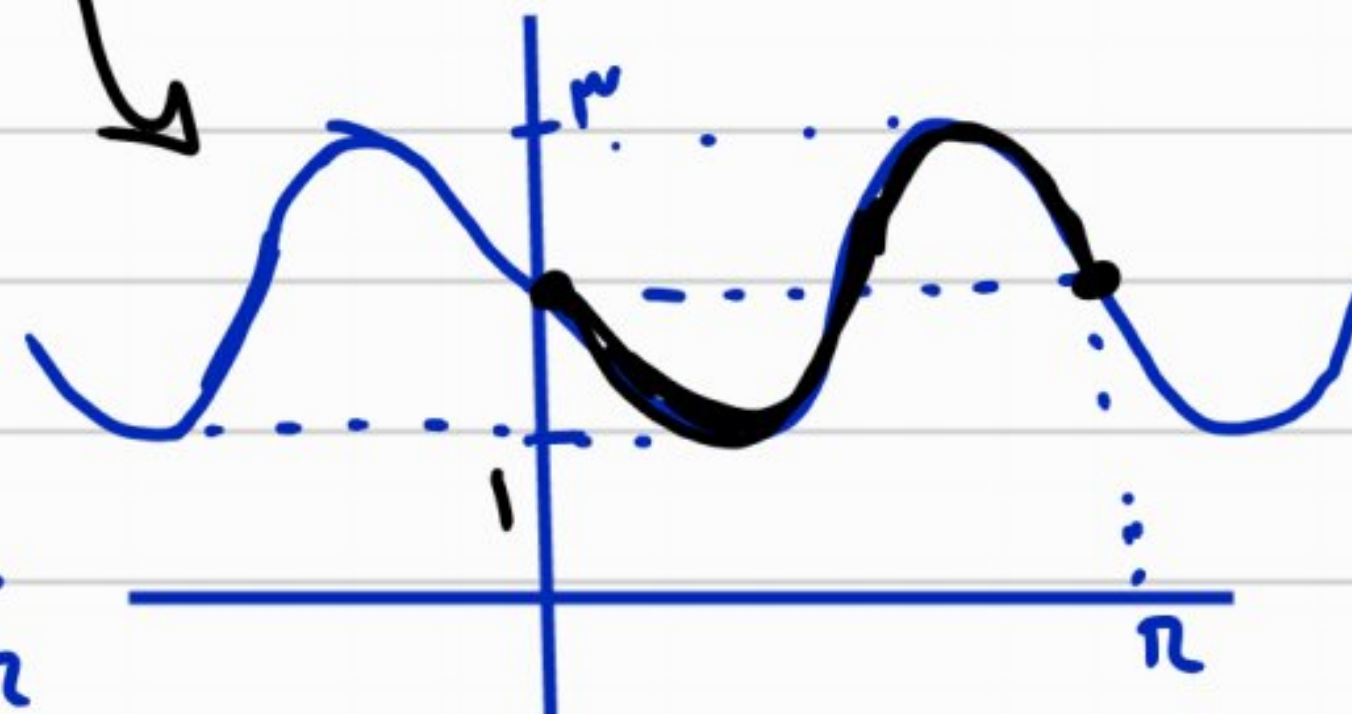
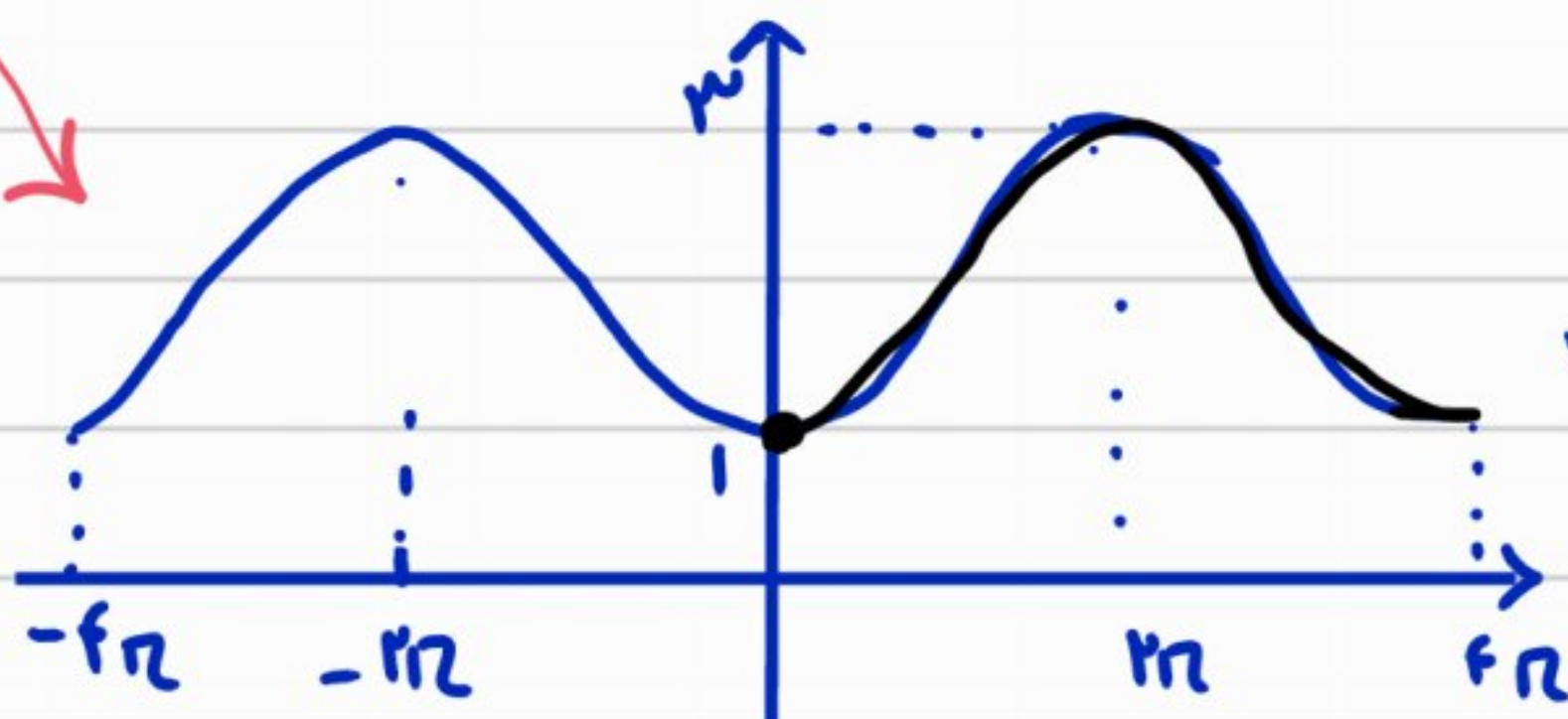
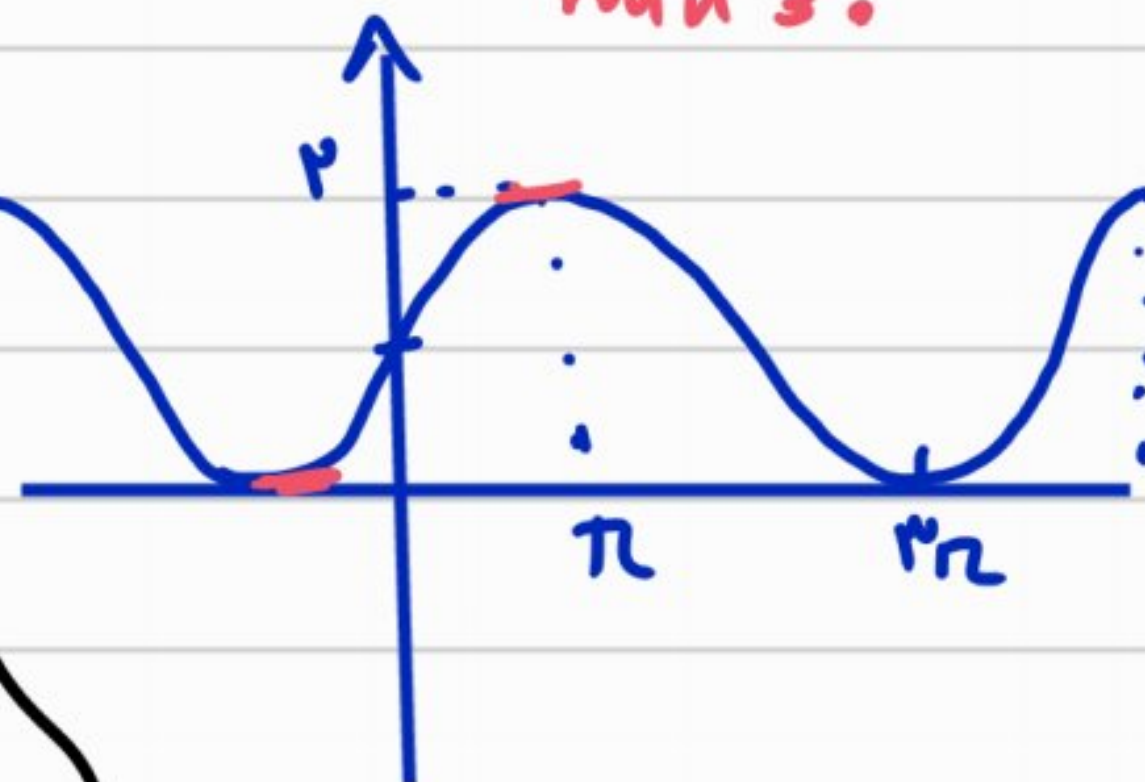


$$3) y = r - \sin(\frac{\pi}{r})$$

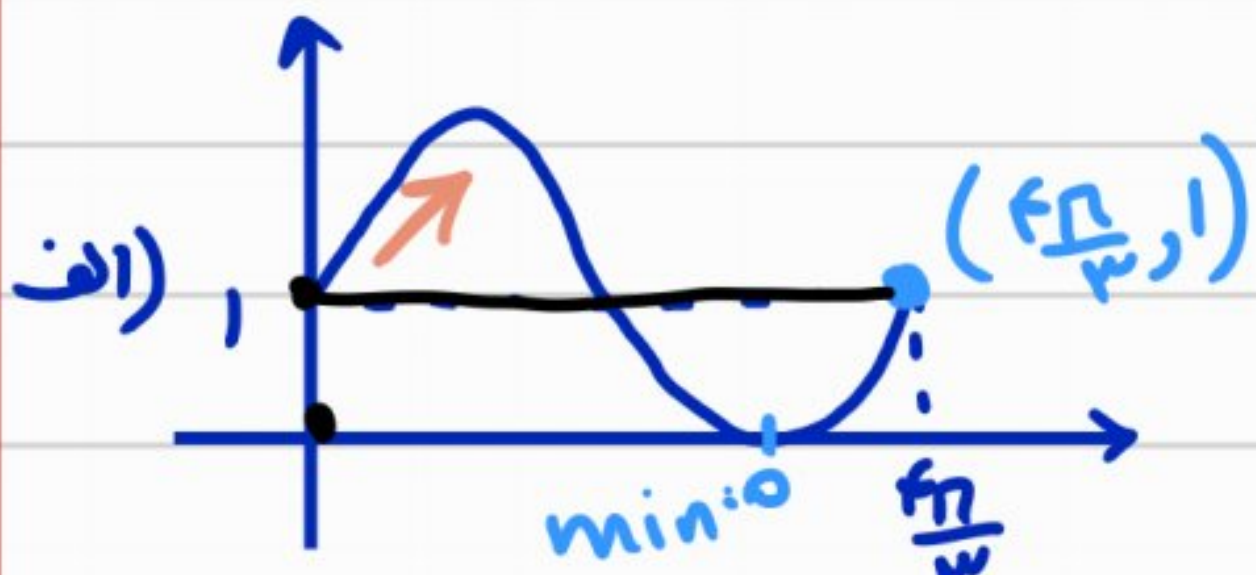
$$4) y = \sin(\frac{\pi}{r}) + 1$$

$$\text{Max: } r$$

$$\text{Min: } 0$$



(۴) قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + C$ رسم شده است. مقادیر a و b و C را تعیین کنید.



$$ax - 1 + C = 0$$

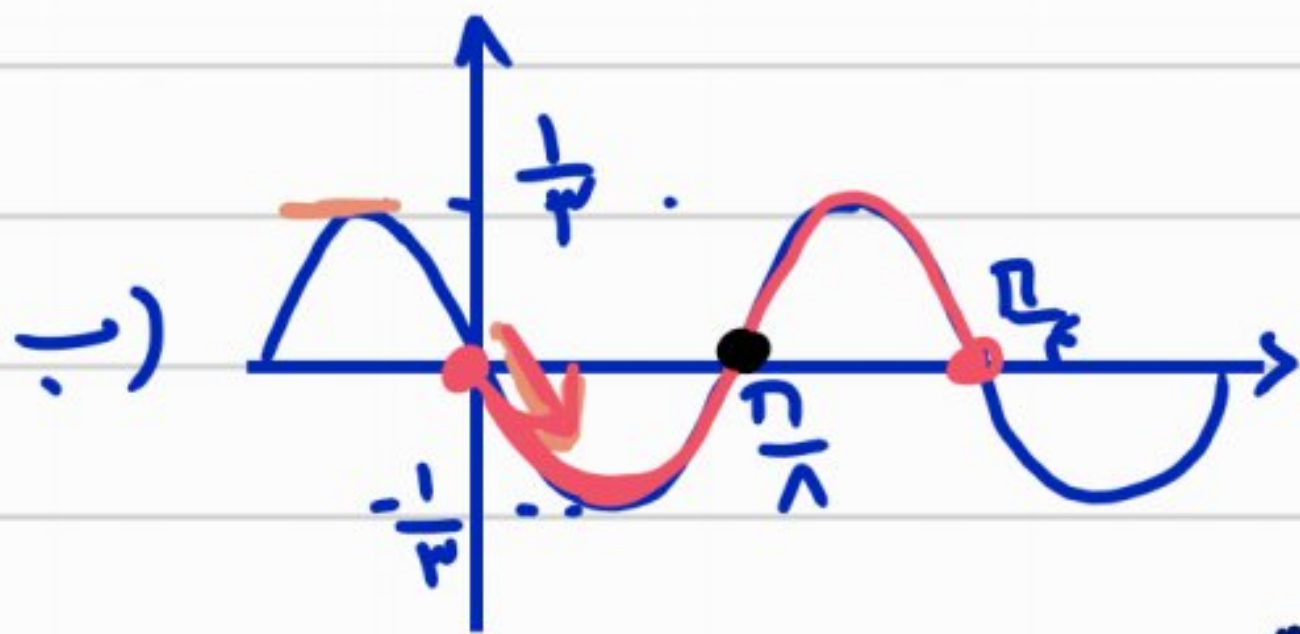
$$-a + C = 0$$

$$1 = a \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{3}\right) + C \Rightarrow C = 1$$

$$-a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$T = \frac{\pi/2}{b} \Rightarrow \frac{\pi/2}{b} = \frac{\pi/2}{1} \rightarrow b = 1$$



$$\text{Max: } \frac{1}{\pi} = a \times 1 + C$$

$$-a + C = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{min: } -\frac{1}{\pi} = a \times 1 + C$$

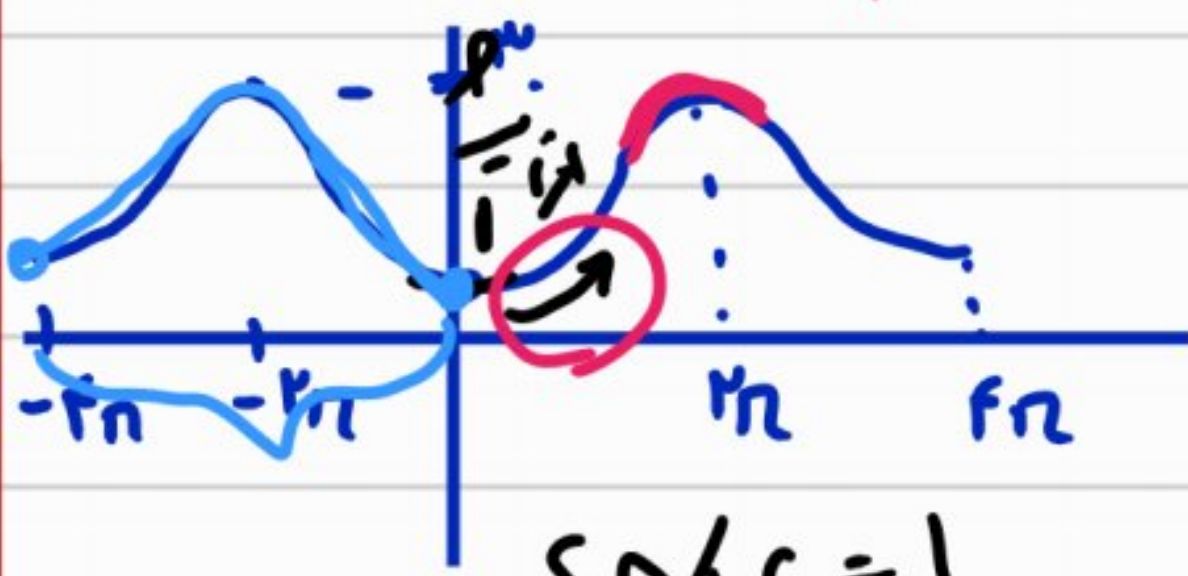
$$a + C = -\frac{1}{\pi}$$

$$a = -\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi/2}{|b|} \rightarrow |b| = 1$$

$$b = -1$$

(۵) ضابطه مربوط به یک نمودار داده شده است. مقادیر a و b و C را تعیین کنید.



$$\text{min: } 1 = a \times 1 + C \rightarrow a + C = 1$$

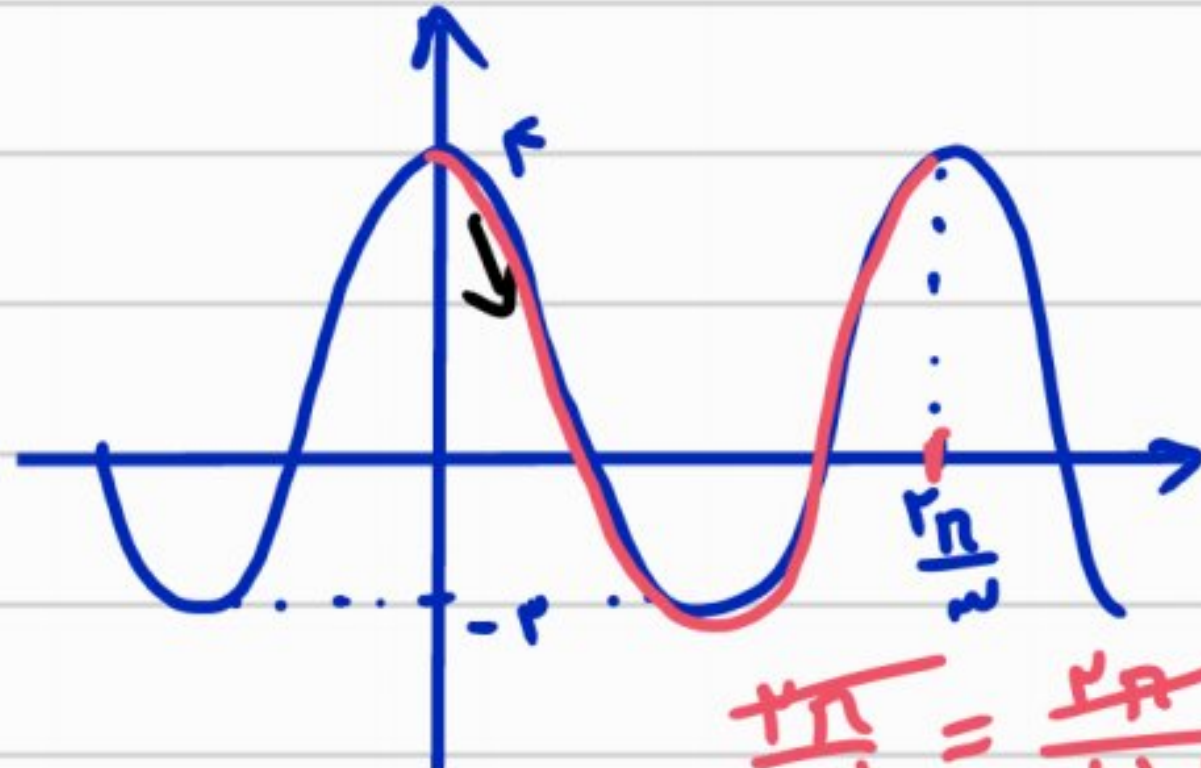
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi/2}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = 2$$

$$\begin{cases} a + C = 1 \\ a + C = 3 \end{cases}$$

$$C = 2$$

$$a + 2 = 1 \rightarrow a = -1$$

$$\text{Max: } 3 = a \times 1 + C \rightarrow -a + C = 3$$



$$\text{Max: } 1 = a \times 1 + C \rightarrow a + C = 1$$

$$\text{min: } -1 = a \times 1 + C \rightarrow -a + C = -1$$

$$a + 1 = 2$$

$$a = 1$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi/2}{|b|} \rightarrow b = 2$$

$$C = 2$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دوبرابرمان :

(۶) مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بدست آورید :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(۷) اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه تند باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \times \frac{16}{25}$$

$$1 - \frac{32}{25} = \cos 2\alpha$$

$$\frac{25-32}{25} = \cos 2\alpha$$

(۸) فرض کنید $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید :

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 - \frac{1}{2} = \cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(۹) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید :

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

۱۰) درستی سادس را زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \tan \alpha$: طرفین $\frac{\cancel{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\cancel{2} \cos^2 \alpha} = \tan \alpha$

ب) $\frac{2 \sin n \cos n}{\cos^2 n - \sin^2 n} = \tan 2n$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\sin 2n}{\cos 2n} = \tan 2n$ (خوبه)

ج) $\frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin^2 \alpha$

د) $\frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \left(\frac{2}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} \right) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ (خوبه)

۱۱) اگر $\frac{\sin^2 n}{1 - \cos^2 n} = 3$ باشد مقادیر مثبت $\sin n$ و $\cos n$ را بدست آورید.

$$1 + \tan^2 n = \frac{1}{\cos^2 n}$$

$$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 n} \rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 n}$$

$$\cos n = \pm \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\sin^2 n = 1 - \cos^2 n = 1 - \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\sin n = \pm \sqrt{\frac{1}{10}}$$

نسبت دهگونی

$$\frac{\cancel{2} \sin n \cos n}{\cancel{2} \sin^2 n} = 3$$

$$\Rightarrow \cot n = 3$$

$$\tan n = \frac{1}{3}$$

معادلات مشابهی :

(۱۳) حرکت معادلات زیر را حل کنید :

$$\text{الف) } r \sin' n + \sqrt{r} \sin n = 0 \rightarrow \sin n (r \sin n + \sqrt{r}) = 0 \begin{cases} \sin n = 0 \\ r \sin n + \sqrt{r} = 0 \end{cases}$$

$$\sin n = 0 \rightsquigarrow \text{Unit Circle} \Rightarrow n = k\pi \quad \checkmark$$

$$r \sin n = -\sqrt{r} \rightarrow \sin n = -\frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \begin{cases} n = 2k\pi + \alpha \\ n = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}} \\ n = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } \cos' n - \cos n + 1 = 0 \quad \checkmark \quad 1 + \cos' n = r \cos' n$$

$$r \cos' n - \cos n = 0$$

$$\cos n (r \cos n - 1) = 0 \begin{cases} \cos n = 0 \rightarrow n = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ r \cos n = 1 \rightarrow \cos n = \frac{1}{r} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{r} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{ج) } \sin' n + \sin' n = 0$$

$$\sin' n = -\sin' n \rightarrow \sin' n = \sin' (-n) \quad \checkmark$$

$$f_n = 2k\pi + (-n)$$

$$g_n = 2k\pi \rightarrow n = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$$

$$f_n = 2k\pi + \pi - (-n) \rightarrow r_n = 2k\pi + \pi$$

$$n = k\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\text{د) } \sin\left(\frac{r\pi}{r} + n\right) - \cos(\pi - n) = 0$$

$$-\cos' n + \cos n = 0 \rightarrow r \cos' n = r \cos n$$

$$r_n = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow r_n = 2k\pi + n \Rightarrow n = 2k\pi$$

$$r_n = 2k\pi - n \Rightarrow r_n = 2k\pi \Rightarrow n = \frac{2k\pi}{2}$$

$$\text{ه) } \cos n (r \cos n + 1) + 1 = 0$$

$$r \cos' n + \cos n + 1 = 0$$

$$r t^r + t + 1 = 0 \rightsquigarrow \Delta = 1 - 4(r)(1) = 1 - 4r = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{r \pm 1} \quad \begin{cases} \frac{-1 + 3}{r} = \frac{2}{r} = \frac{1}{r} \Rightarrow \cos n = \frac{1}{r} \\ \frac{-1 - 3}{r} = -\frac{4}{r} = -1 \Rightarrow \cos n = -1 \rightarrow n = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\cos n = t$$

$$d = \frac{\pi}{\sqrt{r}} \rightarrow n = 2k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$2.) (1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + 1 = r \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + 1 = r(1 - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \cos^2 \alpha + 1 = r - r \cos^2 \alpha$$

$$r \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

$$r t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(r)(-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\cos \alpha = t$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{r}$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{r} = \frac{1}{r} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{r}$$

$$\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

$$t = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\pi$$

$[-\pi, \pi]$ دامنه

خط $y = \frac{1}{r}$ خود را بایع $y = \cos \alpha$ را در صفحه ترسیم کنید.

$$\cos \alpha = \frac{1}{r}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{r}$$

$$\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

$$\alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

k اعداد زوج و فرد

$$k=0 \rightarrow \pm \frac{\pi}{r} \checkmark$$

$$k=1 \rightarrow \pi + \frac{\pi}{r} = \frac{r+1}{r}\pi$$

$$\pi - \frac{\pi}{r} = \frac{r-1}{r}\pi \checkmark$$

$$k=-1 \rightarrow -\pi + \frac{\pi}{r} = \frac{-r+1}{r}\pi \checkmark$$

$$-\pi - \frac{\pi}{r} = \frac{-r-1}{r}\pi$$