
با نام و یاد خدا

جزوه ویژه امتحان نهایی

دوازدهم تجربی

تهیه و تنظیم :

نسیمه دهنوی

بانام ویا در خدا

(۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=5$ طول $\Delta x=5$ بدست آورید.

(۲) مشتق توابع زیر را بدست آورید:

(الف) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(x^3 + x)$

(ب) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4}$

(ج) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+1}}$

(د) $f(x) = \left(\frac{x^3 + 1}{x}\right)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x-1)} + (x^3 + 2x)$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x})^2 \times \frac{1}{x}$$

۳) اگر $f(x) = -1$ و $f'(x) = 2$ و $g(x) = 4$ و $g'(x) = -2$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } (fg)'(x) =$$

$$\text{ب) } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

$$\text{پ) } (5f + 3g)'(x) =$$

۴) دامنه مشتق پذیر توابع زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

(۵) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد
مشتق $f \circ g$ را بدست آورید.

(۶) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ و $g'(x) = \frac{x+3}{x-1}$ و $F(x) = (g \circ f)(x)$ حاصل $F'(x)$
را بدست آورید.

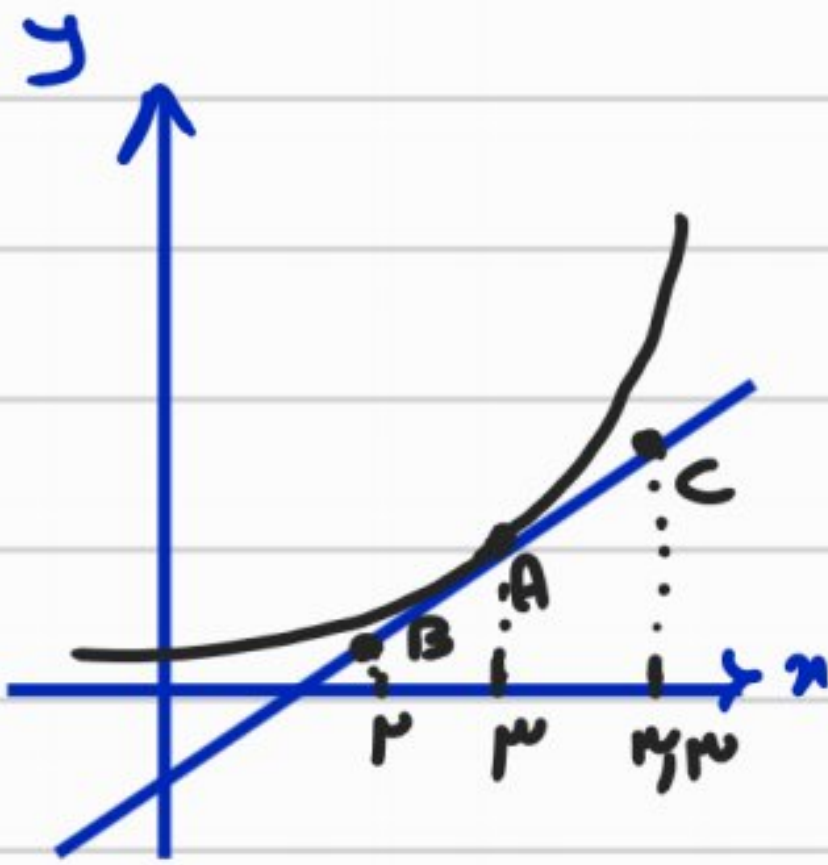
(۷) معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2+4}$ در نقطه $(2, 1/2)$ بنویسید.

(۸) نقاط را روی منحنی $y = x^3 - 4x^2 + 3$ مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط
افقی باشد.

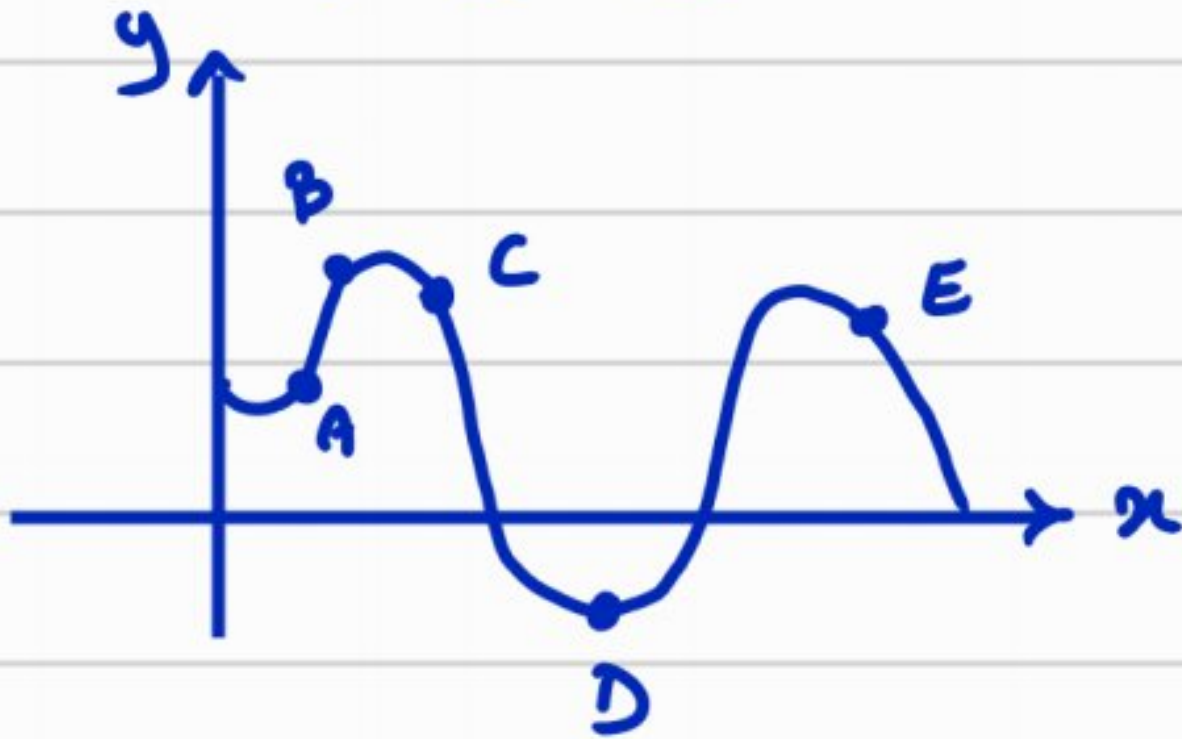
(۹) نشان دهید خط $x=2$ مماس قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-2}$ است.

(۱۰) نمودار تابع f به صورت زیر است اگر $f(۳) = ۲$ ، $f'(۳) = ۱$ باشد

نقاط A ، B ، C را مشخص کنید:



(۱۱) نقاط A ، B ، C ، D و E روی منحنی را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



(۱۲) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b + ۲ & x \geq ۱ \\ ax^۲ + x + ۲b & x < ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق پذیر باشد مقادیر a و b

را بدست آورید:

۱۳) مشتق زیر تابع $f(x) = x|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید:

۱۴) مشتق زیر تابع $y = x^2 - 4|x|$ را در $x=2$ بررسی کنید: پس معادلات نیم مماس را
راست و چپ در $x=2$ را بنویسید:

۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار تابع f را رسم کنید:

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(2)$ وجود ندارند.

ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید:

د) نمودار تابع f' را رسم کنید:

$$(۱۷) \text{ اگر } f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & n \geq 1 \\ n + 2 & 0 < n < 1 \\ 3n + 2 & n \leq 0 \end{cases} \text{ باشد متقارن و راری بازه مار}$$

[۰، ۱] و [۱، ۲] و [۰، -۵] برکند.

$$(۱۸) \text{ اگر } p(t) = 200 + 50t^2 \text{ غائر جمعیت کب نوع با بری در زمان } t \text{ باشد.}$$

الف) آهنگ متوسط اترانی جمعیت را در ۴ ساعت اول سرازمان $t=1$ بدیت آوردید.

ب) آهنگ کطار اترانی جمعیت را در $t=2$ بدیت آوردید.

$$(۱۹) \text{ معادله حرکت متحرکی } p(t) = 2t^2 - 5t + 1 \text{ در بازه } [0, 4] \text{ است در کدام لحظه سرعت کطار و متوسط برابر می شود؟}$$

بیا بیاریم حد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=5$ محاسبه کنید.
 $f(a) = \sqrt{4} = 2$

بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - f(5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$f'(5) = \frac{1}{4}$$

(۲) مشتق توابع زیر را بدست آورید:

(الف) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(x^2 + x)$

$$f'(x) = (3x^2 - 2)(x^2 + x) + (x^3 - 2x + 1)(2x + 1)$$

(ب) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 4}} \times (3x^2 + 4x)$

(ج) $f(x) = \sqrt[n]{\frac{x+4}{x+1}} = \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{1}{n}-1} \times \frac{1(x+1) - 1(x+4)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-1}{n \sqrt[n]{\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{n-1}} (x+1)^2}$$

(د) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^n \rightarrow n \left(\frac{x+1}{x}\right)^{n-1} \times \left(\frac{x - (x+1)}{x^2}\right)$

$$= \frac{-n(x+1)^{n-1}}{x^n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x-1)} \oplus (x^3 + 2x)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \times (2x-1) + 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x})^3 \times \frac{1}{x} \xrightarrow{\quad} (x + \sqrt{x})^3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} (x + \sqrt{x})$$

$$\frac{d}{dx} \xrightarrow{\quad} \frac{d}{(جز)}$$

۳) اگر $f(x) = -1$, $f'(x) = 2$, $g(x) = 4$, $g'(x) = -2$ باشد حاصل عبارت زیر زیر را بدست آورید:

$$\text{الف)} (fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 2 \times 4 + (-2) \times (-1) = 10$$

$$\text{ب)} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{2 \times 4 - (-2) \times (-1)}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج)} (\omega f + \kappa g)'(x) = \omega f'(x) + \kappa g'(x)$$

$$5 \times 2 + 3 \times (-2) = 10 - 6 = 4$$

۴) دامنه مشتق پذیر توابع زیر را بدست آورید:

$$\text{الف)} f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} \quad D_f: x \geq 1 \quad D: x > 0 \quad \text{مشتق پذیر}$$

$$\text{ب)} f(x) = \sqrt{1-2x} \quad 1-2x > 0 \rightarrow -2x > -1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{ج)} f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad 9-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3$$

(۵) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد
 مشتق $f \circ g$ را بدست آورید
 $g'(x) = 2x + 2$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}} \times (2x^2+2)$$

(۶) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ و $g'(x) = \frac{x+3}{x-1}$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}} \times (2x-3)$
 $f(4) = \sqrt{16-12} = 2$
 را بدست آورید:
 $g'(2) = \frac{5}{1} = 5$
 $g'(f(4)) \times f'(4) = 5 \times \frac{5}{4}$
 $= \frac{25}{4}$
 $f'(4) = \frac{1}{4} \times 5$

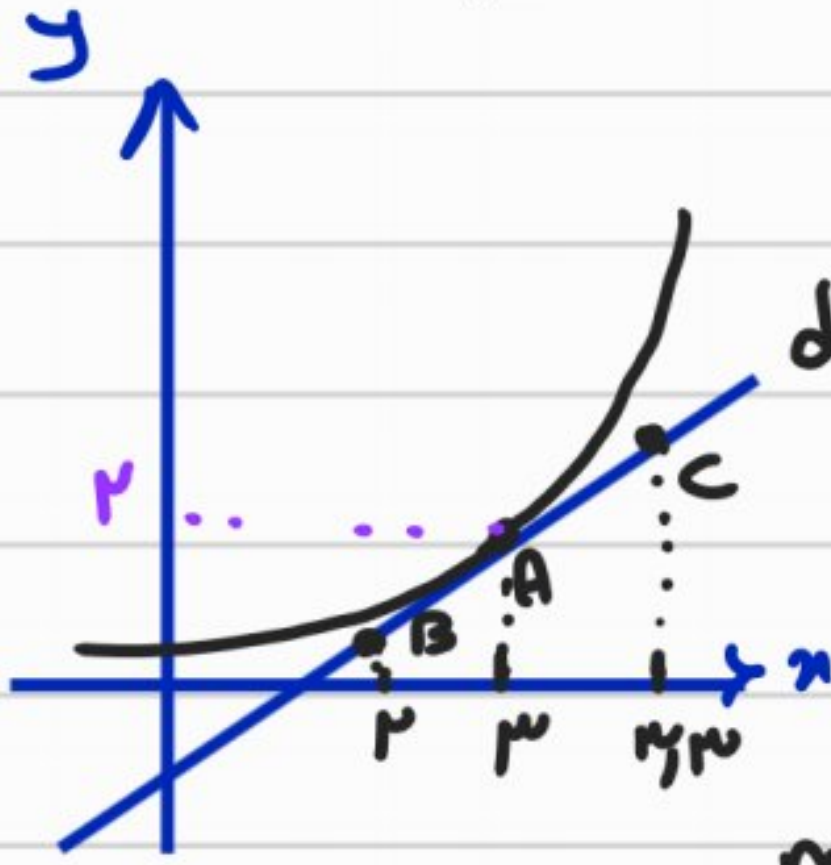
(۷) معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2+4}$ در نقطه $(2, 0.125)$ بنویسید:
 $y' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} \rightarrow y'(2) = \frac{2}{100} = 0.02$
 $y = 0.02x + b \Rightarrow 0.125 = 0.02(2) + b \rightarrow b = 0.125 - 0.04 = \frac{2}{10 \times 1.6} - \frac{4}{100} = \frac{14}{100}$
 $y = 0.02x + 0.14$

(۸) نقاط را روی منحنی $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط افقی باشد.
 $y' = 3x^2 - 8x = 0$
 $3x(x-4) = 0$
 $x = 0$
 $x = 4$
 گوییم خط مماس صاف است
 $f'(x) = 0$

(۹) نشان دهید خط $x=2$ مماس قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-2}$ است.
 $f'(2) = \infty$
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - f(2)}{x-2} \times \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)^2 \sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{0} = \infty$

(۱۰) نمودار تابع f به صورت زیر است اگر $f(2) = 2$ ، $f'(3) = 1$ باشد

نقطه‌ت نقاط A ، B ، C را مشخص کنید:



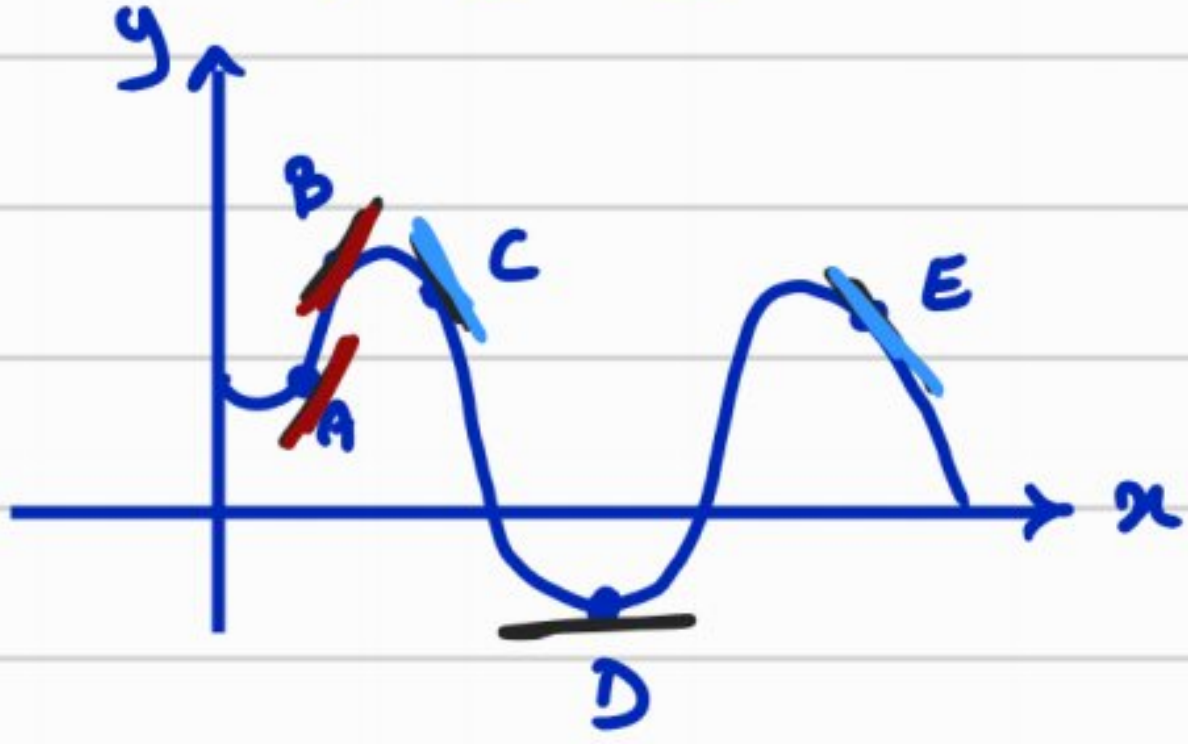
$$m_{AB} = \frac{f(A) - f(B)}{x_A - x_B} \rightarrow 1 = \frac{2 - f(B)}{3 - 2}$$

$$f(B) = 2 - 1 = 1 \rightarrow B: (2, 1)$$

$$m_{AC} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} \rightarrow 1 = \frac{f(C) - 2}{x_C - 3} \rightarrow f(C) - 2 = x_C - 3 \rightarrow f(C) = x_C - 1$$

$C: (3, 2)$

(۱۱) نقاط A ، B ، C ، D و E روی منحنی را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید



$$A > B > D > E > C$$

شیب دهی

$$a(x)^{\frac{1}{3}} \rightarrow a \times \frac{1}{3} \times x^{-\frac{2}{3}}$$

(۱۲) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + b + 2 & (x \geq 1) \\ ax^2 + x + 2b & (x < 1) \end{cases}$ مشتق پذیر باشد مقادیر a و b

$2 = 2 = 1$
شرط پیوستگی

$$\begin{cases} \text{م} : a\sqrt[3]{1} + b + 2 = a + b + 2 \\ \text{چ} : a + 1 + 2b \\ \text{ر} : a + b + 2 \end{cases}$$

$$a + b + 2 = a + 1 + 2b \rightarrow b - 2b = 1 - 2 \rightarrow -b = -1 \rightarrow b = 1$$

شرط مشتق پذیری

$$\begin{cases} \text{چ} : 2a + 1 \\ \text{ر} : \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{cases}$$

$$2a + 1 = \frac{a}{3} \rightarrow 6a + 3 = a \rightarrow 5a = -3 \rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

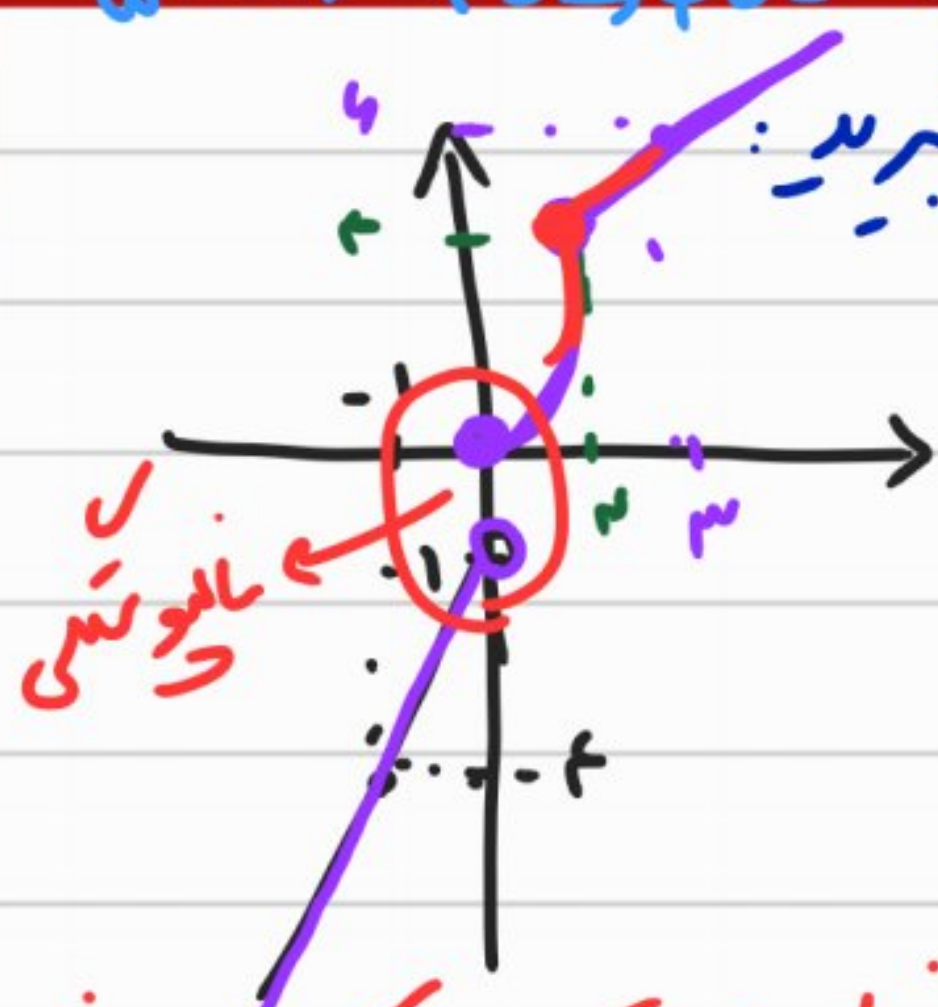
(۱۳) مشتق پذیر تابع $f(x) = x|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید:

✓ f در $x=1$ پیوسته است $\rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$: شرایط
 $f(x) = \begin{cases} x(x-1) & x > 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases}$
 $x \neq 1$:
 مشتق: $-2x+1 \Rightarrow -1$ (چپ)
 مشتق: $2x-1 \Rightarrow +1$ (راست)
 نتیجه: $\neq$ پس مشتق پذیر نیست

(۱۴) مشتق پذیر تابع $y = |x^2 - 4|$ را در $x=2$ بررسی کنید: پس معادلات نیم محال را $y = ax + b$ را بنویسید:
 راست و چپ در $x=2$ را بنویسید:
 $x = \pm 2$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \cup x > 2 \\ -(x^2 - 4) & -2 < x < 2 \end{cases}$
 (۱, ۳) $(2, 0)$
 مشتق: $-2x \Rightarrow -4$ (چپ)
 مشتق: $2x \Rightarrow 4$ (راست)
 $-4 \neq 4$ پس مشتق پذیر نیست
 نیم محال: $y = -4x + b$
 $3 = -4(1) + b \Rightarrow b = 7$
 $y = -4x + 7$
 چپ: $y = f(x) + b \Rightarrow y = f(x) - 7$
 $0 = f(2) + b \Rightarrow b = -7$

(۱۵) تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:



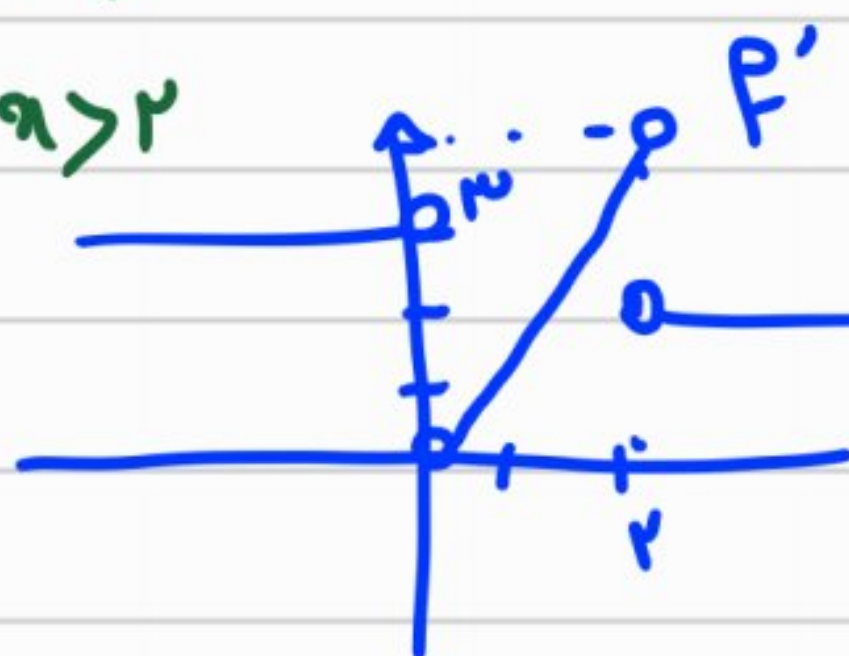
(الف) نمودار تابع f را رسم کنید:

(ب) نشان دهید $f'(0)$ و $f'(2)$ وجود ندارند.

در صورتی که f' وجود داشته باشد، آن را بنویسید:

(ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$



(د) نمودار تابع f' را رسم کنید:

$f(n)$ باشد متقن زیر f را روی بازه مار

(۱۷) اگر $n \leq 1$ $f(n) = n^2 - 1$
 اگر $n > 1$ $f(n) = n^2 + 2$
 متقن زیر f در $[1, 2]$ و $(-\infty, 0]$ برکسید
 متقن زیر f در $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ برکسید
 متقن زیر f در $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ برکسید

متقن زیر f در $[1, 2]$ و $(-\infty, 0]$ برکسید
 متقن زیر f در $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ برکسید
 متقن زیر f در $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ برکسید

متقن زیر f در $[1, 2]$ و $(-\infty, 0]$ برکسید
 متقن زیر f در $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ برکسید
 متقن زیر f در $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ برکسید

متقن زیر f در $[1, 2]$ و $(-\infty, 0]$ برکسید
 متقن زیر f در $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ برکسید
 متقن زیر f در $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ برکسید

(۱۸) اگر $p(t) = 1000 + 500t^2$ غائر جمعیت کبک بزرگ در زمان t باشد.

الف) آهنگ متوسط اتران جمعیت را در $t=1$ ساعت اول سرازمان $t=1$ بدیت آورید:

متوسط: $\frac{p(5) - p(1)}{5 - 1} = \frac{1000 + 500 \times 25 - 1000 - 500 \times 1}{4} = \frac{12000}{4} = 3000$

ب) آهنگ خطار اتران جمعیت را در $t=2$ بدیت آورید.

$p'(t) = 1000t = 2000$

(۱۹) معادله حرکت متحرک $p(t) = 2t^2 - 5t + 1$ در بازه $[0, 4]$ است در کدام لحظه سرعت خطار متوسط برابر می شود؟

متوسط: $\frac{p(4) - p(0)}{4 - 0} = \frac{13 - 1}{4} = 3$

خطار: $4t - 5 = 3 \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2$