

۱- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32^2}$

ب) $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64^3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x}$

ث) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9}$

« پاسخ »

الف) $3n-2 = -10 \Rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{32^2} = 2^{-10} \Rightarrow n = -\frac{8}{3}$

ب) $9^{3y-3} = 27^{y+1} \Rightarrow 3^{6y-6} = 3^{3y+3} \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64^3} \Rightarrow 2^{6x+4} - 18 = 2$

$6x = -22 \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x} = 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow x^2 - 4x - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$

ث) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$

۲- فرض کنیم $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ و $h(x) = 10^x$ مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $g(-1)$

پ) $h(-2)$

« پاسخ »

الف) $f(3) = 3^3 = 27$

ب) $g(-1) = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$

پ) $h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

۳- کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه‌ی $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right)$ روی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه‌ی $(0, 10)$ است.

پ) دامنه‌ی توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 6x$ با محور x ها، نقطه‌ی $(0, 6)$ است.

« پاسخ »

الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

۴- کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $y = x^3$

پ) $y = (0.1)^x$

ت) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

ث) $y - 3x = 2$

ج) $y = \sqrt{x-1}$

« پاسخ »

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$ (نادرست)

ب) $y = x^3$ (نادرست)

پ) $y = (0.1)^x$ (درست)

ت) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (درست)

ث) $y - 3x = 2$ (نادرست)

ج) $y = \sqrt{x-1}$ (نادرست)

۵- هریک از معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{2x+1} = 32$

ب) $9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x}$

« پاسخ »

الف) $2^{2x+1} = 32 \Rightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Rightarrow 2x+1 = 5 \Rightarrow x = 2$

ب) $9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} \Rightarrow (3^2)^{x^2+2} = (3^{-3})^{2x} \Rightarrow 3^{2x^2+4} = 3^{-6x} \Rightarrow 2x^2 + 4 = -6x$

$2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

۶- از تساوی‌های $2^{x+2y} = \frac{1}{32}$ و $2^{x-2y} = 8$ نتیجه می‌شود که $x + y$ برابر با می‌باشد.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2^{x+2y} &= 2^{-5} \\ 2^{x-2y} &= 2^3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = -5 \\ x-2y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x+y = -3$$

۷- هر یک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{2n-6} > 16$

ب) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{7}\right)^{7+x}$

« پاسخ »

الف) $2^{2n-6} > 2^4 \Rightarrow 2n-6 > 4 \Rightarrow 2n > 10 \Rightarrow n > 5$

ب) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{7}\right)^{7+x} \Rightarrow 5-x > 7+x \Rightarrow -2x > 2 \Rightarrow x < -1$

۸- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $27^{4+4n} = 81^{2n+8}$

ب) $2^{x^2-x+2} = 128^{x-2}$

« پاسخ »

الف) $27^{4+4n} = 81^{2n+8} \Rightarrow (3^3)^{4+4n} = (3^4)^{2n+8} \Rightarrow 3^{12+12n} = 3^{8n+32} \Rightarrow 12+12n = 8n+32 \Rightarrow 4n = 20 \Rightarrow n = 5$

ب) $2^{x^2-x+2} = (2^7)^{x-2} \Rightarrow 2^{x^2-x+2} = 2^{7x-14} \Rightarrow x^2-x+2 = 7x-14 \Rightarrow x^2-8x+16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$

۹- فرض کنید تابع $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 125$ محورهای x و y را به ترتیب در نقاط $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ قطع می‌کند. مقادیر a و b را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها را قطع کند}]{y = 0} 0 &= \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125 \Rightarrow 5^{-x+1} = 5^3 \\ \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0) \Rightarrow a = -2 \\ \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها را قطع کند}]{x = 0} y &= \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 125 = 5 - 125 \Rightarrow y = -120 \Rightarrow B(0, -120) \Rightarrow b = -120 \end{aligned}$$

۱۰- در تابع $f(x) = a^x + b$ اگر $f(0) = 6$ و $f(5) = 37$ باشد $f(-2)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f(0) = 6 &\Rightarrow a^0 + b = 6 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5 \\ f(5) = 37 &\Rightarrow a^5 + 5 = 37 \Rightarrow a^5 = 32 \Rightarrow a^5 = 2^5 \Rightarrow a = 2 \\ f(x) = 2^x + 5 &\Rightarrow f(-2) = 2^{-2} + 5 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

۱۱- معادله‌ی $4^x + 6^x = 10 \times 9^{x-1}$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 4^x + 6^x &= 10 \times 9^{x-1} \Rightarrow 4 \times 4^{x-1} + 6 \times 6^{x-1} = 10 \times 9^{x-1} \\ \Rightarrow (3 \times 2^x + 5 \times 3^x)(3 \times 2^x - 2 \times 3^x) &= 0 \\ 3 \times 2^x = 2 \times 3^x &\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

می‌دانیم $(3 \times 2^x + 5 \times 3^x)$ همواره مثبت است، پس:

۱۲- هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 3^{x^2+2x} \leq 243^{x+2}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{5}\right)^{1-7x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 3^{x^2+2x} \leq 3^{5x+10} \Rightarrow x^2+2x \leq 5x+10 \Rightarrow x^2-3x-10 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{5}\right)^{1-7x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21} \Rightarrow 1-7x < 4x-21 \Rightarrow -11x < -22 \Rightarrow x > 2$$

۱۳- اگر $f(x) = 27^x - 3$ باشد، $f\left(\frac{2}{3}\right)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 27^{\frac{2}{3}} - 3 = (3^3)^{\frac{2}{3}} - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

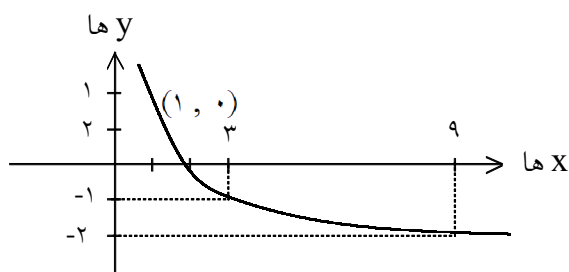
۱۴- اگر $\text{Log}_6^3 = a$ باشد، Log_6^2 را بر حسب a به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_6^2 = \text{Log}_6^{\frac{6}{3}} = \text{Log}_6^6 - \text{Log}_6^3 = 1 - a$$

۱۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

« پاسخ »



y	۰	-۱	-۲	۱	۲
x	۱	۳	۹	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = x$$

۱۶- اگر $f(x) = 3 - 2\log_{\frac{x}{2}}(5 - \frac{x}{2})$ مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(42) = 3 - 2\log_{\frac{42}{2}}\left(5 - \frac{42}{2}\right) = 3 - 2\log_{\frac{16}{2}} = 3 - 2 \times 2 = -1$$

۱۷- از معادله $\log(x - 3) = 2 - \frac{1}{2}\log 25$ مقدار x را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\log(x - 3) + \frac{1}{2}\log 25 = 2$$

$$\log(x - 3)5 = 2 \Rightarrow 5x - 15 = 100 \Rightarrow 5x = 115 \Rightarrow x = 23$$

۱۸- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، آنگاه حاصل $\log 15$ کدام است؟

« پاسخ »

$$\log 15 = \log 3 \times 5 = \log 3 + \log 5 = \log 3 + 1 - \log 2 = b - a + 1$$

۱۹- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 2\log_5 3 - \log_5 x = \log_5 3 + \log_5 9 \quad \text{ب) } (\log_7 \sqrt{5} - \log_7 3)$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 2\log_5 3 - \log_5 x = \log_5 3 + \log_5 9 \Rightarrow 2\log_5 3 - \log_5 3 - \log_5 9 = \log_5 x$$

$$\Rightarrow \log_5 3 - \log_5 9 = \log_5 x \Rightarrow \log_5 \frac{3}{9} = \log_5 x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \log_7 \sqrt{5} - \log_7 3 &= (\log_7 \sqrt{5} - \log_7 3) = \log_7 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) = \log_7 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$20\text{- اگر } \log_c a = \frac{3}{4} \text{ و } \log_c b = \frac{7}{9} \text{ باشد، مقدار } \log_b a^{\frac{1}{2}} \sqrt{b} \text{ را بیابید.}$$

« پاسخ »

$$\text{با استفاده از ویژگی تغییر مبنا } \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \text{ داریم:}$$

$$\begin{aligned} \log_b a^{\frac{1}{2}} \sqrt{b} &= \frac{\log_c a^{\frac{1}{2}} \sqrt{b}}{\log_c b} = \frac{\log_c a^{\frac{1}{2}} + \log_c \sqrt{b}}{2\log_c b} = \frac{2\log_c a + \frac{1}{2}\log_c b}{2\log_c b} \\ &= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)}{2\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{17}{21} \end{aligned}$$

۲۱- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

$$\log_7 (2x + 5) - \log_7 (x - 1) = 2\log_7 3$$

« پاسخ »

$$\log_7 \frac{2x + 5}{x - 1} = \log_7 9 \Rightarrow \frac{2x + 5}{x - 1} = 9 \Rightarrow x = 2$$

(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۲۲- ابتدا معادله‌ی لگاریتمی $\text{Log}(x - ۲) = ۳\text{Log}۲ - \text{Log}(x - ۴)$ را حل کرده و سپس حاصل $\text{Log}_{۲۷}\sqrt{x - ۳}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}(x - ۲) = \text{Log}\frac{۸}{x - ۴} \Rightarrow x - ۲ = \frac{۸}{x - ۴} \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۸ = ۸$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$x(x - ۶) = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x = ۶ & (۰/۵) \end{cases} \quad \text{Log}_{۲۷}\sqrt{۳} = \text{Log}_{۲۷}۳^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۶} \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

۲۳- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

ب) $\text{Log}(x + ۴) = \frac{۱}{۲}\text{Log}(۲x + ۱۱)$

الف) $\text{Log}_{\sqrt{۷}}^{x+۳} + \text{Log}_{\sqrt{۷}}^{x-۳} = ۲$

« پاسخ »

الف) $\text{Log}_{\sqrt{۷}}^{(x-۳)(x+۳)} = ۲ \Rightarrow (x+۳)(x-۳) = (\sqrt{۷})^۲ = ۷$

$$x^۲ - ۹ = ۷ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \pm ۴$$

$x = -۴$ غیرقابل قبول است زیرا به ازای آن عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود.

ب) $\text{Log}(x + ۴) = \frac{۱}{۲}\text{Log}(۲x + ۱۱) \Rightarrow ۲\text{Log}(x + ۴) = \text{Log}(۲x + ۱۱)$

$$\Rightarrow \text{Log}(x + ۴)^۲ = \text{Log}(۲x + ۱۱) \Rightarrow (x + ۴)^۲ = ۲x + ۱۱$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۵ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$x = -۵$ غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن عبارت جلوی $\text{Log}(x + ۴)$ منفی خواهد شد.

۲۴- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

$$\text{Log}_{۳}(x - ۱) + \text{Log}_{۳}\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) = ۲$$

« پاسخ »

$$\text{Log}_{۳}(x - ۱) + \text{Log}_{۳}\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) = ۲$$

$$\text{Log}_{۳}(x - ۱)\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) = ۲ \Rightarrow (x - ۱)\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) = ۳^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} + x - \frac{x}{۲} - ۱ = ۹$$

$$x^۲ + x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x + ۵)(x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = -۵ \quad \text{ق ق}, x = ۴ \quad \text{غ ق ق}$$

۲۵- اگر $\text{Log } 2 = a$ و $\text{Log } 3 = b$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\text{Log} \sqrt{0.75}$$

« پاسخ »

$$\text{Log } 2 = a, \text{Log } 3 = b$$

$$\begin{aligned} \text{Log} \sqrt{0.75} &= \text{Log} \left(\frac{75}{100} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\text{Log } 3 - \text{Log } 2^2) = \frac{1}{2} (\text{Log } 3 - 2 \text{Log } 2) \\ &= \frac{1}{2} (b - 2a) \end{aligned}$$

۲۶- اگر $f(x) = 8x + 1$ ، مقدار $f(6)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2 + 2 \text{Log}_2^x &= 6 \Rightarrow 2 \text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \xrightarrow{x=4} f(2 + 2 \text{Log}_2^4) \\ &= 8(4) + 1 \Rightarrow f(6) = 33 \end{aligned}$$

۲۷- اگر $f(x) = 20x + 1$ ، مقدار $f(5 - \text{Log}_5^x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$4 - \text{Log}_5^x = 5 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow f\left(4 - \text{Log}_5^{\frac{1}{5}}\right) = 20 \left(\frac{1}{5}\right) + 1 \Rightarrow f(5) = 4 + 1 \Rightarrow f(5) = 5$$

$$f(x) = \sqrt{2 - \text{Log}_{11}^{(x-1)}}$$

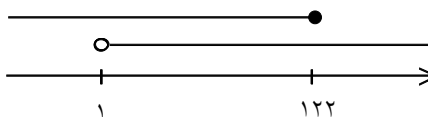
۲۸- دامنه تابع زیر را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$2 - \text{Log}_{11}^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_{11}^{(x-1)} \leq 2 \Rightarrow x - 1 \leq 121 \Rightarrow x \leq 122 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (1, 122]$$



۲۹- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{ب) } \log_3 \sqrt[3]{3}$$

$$\text{الف) } \log \sqrt[4]{8}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \log \sqrt[4]{8} = \log \sqrt[2]{\frac{2}{\sqrt[2]{2}}} = \frac{2}{2} \log \frac{2}{\sqrt[2]{2}} = \frac{2}{2}$$

$$\text{ب) } \log_3 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

۳۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{\log_5(x-1)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(1) \quad x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$(2) \quad \log_5(x-1) \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} D_f = (1, +\infty) - \{2\}$$

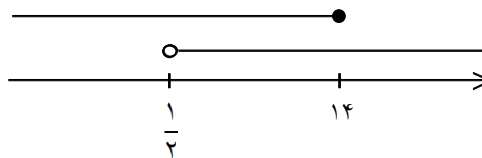
۳۱- نامعادله $\log_3(2x-1) \leq 3$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$(1) \quad 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \log_3(2x-1) \leq 3 \Rightarrow 2x-1 \leq 3^3 \Rightarrow 2x \leq 28 \Rightarrow x \leq 14$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \text{جواب} = \left(\frac{1}{2}, 14\right]$$



۳۲- در معادله ی $x^{-6} + \log_2^x = \frac{1}{256}$ ریشه ها را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x^{-6} + \log_2^x = \frac{1}{256} \Rightarrow \log_2 x^{-6} + \log_2^x = \log_2 \frac{1}{256} \Rightarrow (-6 + \log_2^x) \log_2^x = \log_2^{-8}$$

$$\begin{aligned} & \log_2^x = t \\ & \xrightarrow{\quad} (-6 + t)t = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0 \\ & \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \log_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \\ t = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases} \end{aligned}$$

۳۳- حاصل $\log_2^5 \sqrt{2} + \log_2^{16}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\log_2^5 \frac{1}{\sqrt{2}} + \log_2^{16} = 2 \log_2^5 + 4 = 2 \log_2^{25} + 4 = 2 + 4 = 25 + 4 = 29$$

۳۴- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log(x^2 + 19) = 2$

ب) $\log_3(\log_2^{(x+1)} - 2) = 1$

« پاسخ »

الف) $\log(x^2 + 19) = 2 \Rightarrow x^2 + 19 = 100 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 & \text{ق ق} \\ x = -9 & \text{ق ق} \end{cases}$

ب) $\log_3(\log_2^{(x+1)} - 2) = 1 \Rightarrow \log_2^{(x+1)} - 2 = 3 \Rightarrow \log_2^{(x+1)} = 5 \Rightarrow x + 1 = 2^5 \Rightarrow x = 31$ ق ق

۳۵- اگر $\text{Log } 2 = a$ و $\text{Log } 3 = b$ باشد، لگاریتم‌های زیر را بر حسب a , b بنویسید.

الف) $\text{Log } 270$ (ب) $\text{Log } 80$ (پ) $\text{Log } 0.125$ (ت) $\text{Log } 50$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log } 270 = \text{Log } 3^3 \times 10 = 3\text{Log } 3 + \text{Log } 10 = 3b + 1$$

$$\text{ب) } \text{Log } 80 = \text{Log } 2^3 \times 10 = 3\text{Log } 2 + \text{Log } 10 = 3a + 1$$

$$\text{پ) } \text{Log } 0.125 = \text{Log } \frac{1}{8} = \text{Log } 1 - \text{Log } 2^3 = 0 - 3a = -3a$$

$$\text{ت) } \text{Log } 50 = \text{Log } \frac{100}{2} = \text{Log } 10^2 - \text{Log } 2 = 2 - a$$

۳۶- دامنه توابع زیر را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{3 + \text{Log}_{0.2}(x + 10)} \quad \text{ب) } g(x) = \text{Log}_5(4 - [x]^2)$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } x + 10 > 0 \Rightarrow x > -10 \quad (1)$$

$$3 + \text{Log}_{0.2}(x + 10) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_{0.2}(x + 10) \geq -3 \Rightarrow x + 10 \leq (0.2)^{-3} \Rightarrow x + 10 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

$$\Rightarrow x + 10 \leq 5^3 \Rightarrow x + 10 \leq 125 \Rightarrow x \leq 115 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (-10, 115]$$

$$\text{ب) } 4 - [x]^2 > 0 \Rightarrow -2 < [x] < 2 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

$$D_g = [-1, 2)$$

۳۷- مقدار A را حساب کنید.

$$A = \frac{1}{\text{Log}_3^V + 1} + \frac{1}{\text{Log}_V^3 + 1}$$

« پاسخ »

$$A = \frac{1}{\text{Log}_3^V + \text{Log}_3^3} + \frac{1}{\text{Log}_V^3 + \text{Log}_V^V} = \frac{1}{\text{Log}_3^{21}} + \frac{1}{\text{Log}_V^{21}} = \text{Log}_{21}^3 + \text{Log}_{21}^V$$

$$= \text{Log}_{21}^{21} = 1$$

۳۸- اگر $\text{Log } 2 = a$ و $\text{Log } 3 = b$ باشد، لگاریتم‌های زیر را بر حسب a , b بنویسید.

الف) $\text{Log } 24$ (ب) $\text{Log } 120$ (پ) $\text{Log } 0.5$ (ت) $\text{Log } \frac{4}{3}$

« پاسخ »

الف) $\text{Log } 24 = \text{Log } 2^3 \times 3 = 3\text{Log } 2 + \text{Log } 3 = 3a + b$

ب) $\text{Log } 120 = \text{Log } 2^3 \times 3 \times 10 = 3\text{Log } 2 + \text{Log } 3 + \text{Log } 10 = 3a + b + 1$

پ) $\text{Log } 0.5 = \text{Log } \frac{1}{2} = \text{Log } 1 - \text{Log } 2 = 0 - a = -a$

ت) $\text{Log } \frac{4}{3} = \text{Log } 4 - \text{Log } 3 = \text{Log } 2^2 - b = 2a - b$

۳۹- مقادیر زیر را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\left[\text{Log } \frac{120}{3} \right] + [\text{Sin } 6]$

ب) $\left[\text{Log } \frac{100}{5} \right] + [\text{Cos } 2]$

« پاسخ »

الف) $2^6 < 120 < 2^7 \Rightarrow \text{Log } 2^6 < \text{Log } 120 < \text{Log } 2^7 \Rightarrow 6 < \text{Log } 120 < 7 \Rightarrow \left[\text{Log } \frac{120}{3} \right] = 6$

$\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow \text{Sin } \frac{3\pi}{2} < \text{Sin } 6 < \text{Sin } 2\pi \Rightarrow -1 < \text{Sin } 6 < 0 \Rightarrow [\text{Sin } 6] = -1$

$\Rightarrow \left[\text{Log } \frac{120}{3} \right] + [\text{Sin } 6] = 6 - 1 = 5$

ب) $5^2 < 100 < 5^3 \Rightarrow \text{Log } 5^2 < \text{Log } 100 < \text{Log } 5^3 \Rightarrow 2 < \text{Log } 100 < 3 \Rightarrow \left[\text{Log } \frac{100}{5} \right] = 2$

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow \text{Cos } \pi < \text{Cos } 2 < \text{Cos } \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \text{Cos } 2 < 0 \Rightarrow [\text{Cos } 2] = -1$

$\Rightarrow \left[\text{Log } \frac{100}{5} \right] + [\text{Cos } 2] = 2 - 1 = 1$

۴۰- در معادله ی $(\text{Log}_5^x + 3) = 625$ مقدار x را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(\text{Log}_5^x + 3) = 625 \Rightarrow \text{Log}_5^x (\text{Log}_5^x + 3) = \text{Log}_5^{625} \Rightarrow (\text{Log}_5^x + 3) \text{Log}_5^x = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Log}_5^x &= t \\ \longrightarrow (t + 3)t &= 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$t = 1 \Rightarrow \text{Log}_5^x = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$t = -4 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -4 \Rightarrow x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$$

۴۱- اگر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = 2 + \text{Log}_a^{(x+1)}$ از نقطه ی $(1, 5)$ عبور کند، مقدار a چه قدر است؟

« پاسخ »

$$f(1) = 5 \Rightarrow 2 + \text{Log}_a^2 = 5 \Rightarrow \text{Log}_a^2 = 3 \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

۴۲- عبارت روبه‌رو را به یک لگاریتم تبدیل کنید.

$$4 \text{Log} a - \frac{2}{5} \text{Log} x + \text{Log} b =$$

« پاسخ »

$$\text{Log} a^4 - \text{Log} \sqrt[5]{x^2} + \text{Log} b = \text{Log} \frac{a^4 b}{\sqrt[5]{x^2}}$$

۴۳- معادله ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

$$\text{Log} (2x + 7) - 2 \text{Log} 3 = \text{Log} x$$

« پاسخ »

$$\text{Log} (2x + 7) - \text{Log} 9 = \text{Log} x \Rightarrow \text{Log} \frac{2x + 7}{9} = \text{Log} x \Rightarrow \frac{2x + 7}{9} = x$$

$$2x + 7 = 9x \Rightarrow x = 1$$

۴۴- عبارت روبه‌رو را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید.

$${}^3\text{Log}x + \frac{2}{3}\text{Log}y - \text{Log}a$$

« پاسخ »

$$\text{Log}x^3 + \text{Log}\sqrt[3]{y^2} - \text{Log}a = \text{Log}\frac{x^3\sqrt[3]{y^2}}{a}$$

۴۵- در جای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$\text{Log}_{\square} 0.001 = -3$$

« پاسخ »

$$10^{-3} = 0.001$$

۴۶- اگر $f(x) = \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ باشد، آنگاه حاصل $f(2) + f(3) + \dots + f(99)$ را به‌دست آورید.

« پاسخ »

$$f(2) + f(3) + \dots + f(99) = \text{Log}\frac{3}{4} + \text{Log}\frac{8}{9} + \text{Log}\frac{15}{16} + \dots + \text{Log}\frac{99^2 - 1}{99^2}$$

$$= \text{Log}\left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{99^2 - 1}{99^2}\right)$$

$$= \text{Log}\left(\frac{1 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{4}} \times \frac{\cancel{4} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5}} \times \dots \times \frac{\cancel{98} \times \cancel{99}}{\cancel{99} \times \cancel{99}} \times \frac{\cancel{99} \times 100}{\cancel{99} \times 99}\right)$$

$$= \text{Log}\frac{1 \times 100}{2 \times 99} = 2 - \text{Log} 198$$

۴۷- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ب) $y = -\text{Log}_2(x-1)$

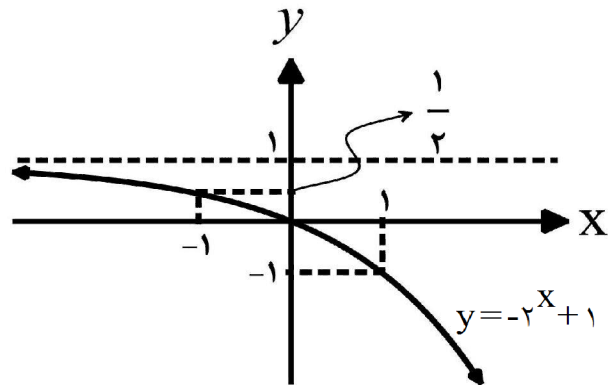
الف) $y = -2^x + 1$

ت) $y = \frac{|x|}{x} \text{Log} x$

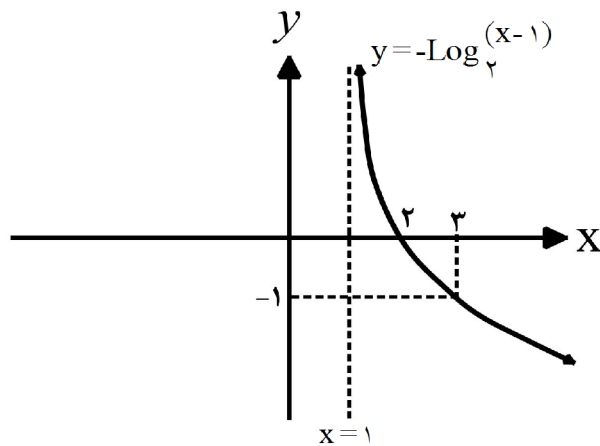
پ) $y = 2^{|x|}$

« پاسخ »

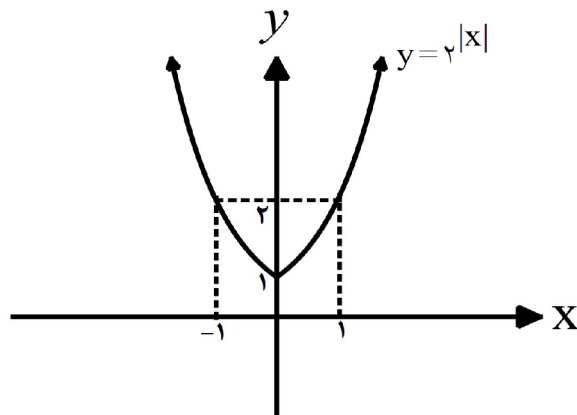
الف)



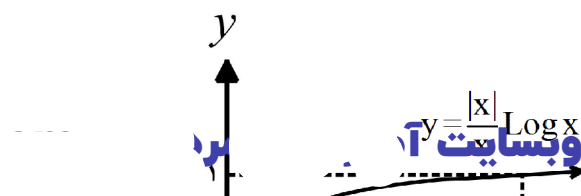
ب)



پ)



ت)



x	-۱	۰	۱
y	۱/۲	۰	-۱

x	۲	۳
y	۰	-۱

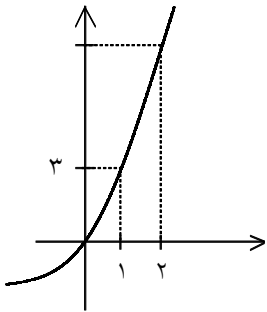
$x - 1 = ۰ \Rightarrow x = 1$

x	-۱	۰	۱
y	۲	۱	۲

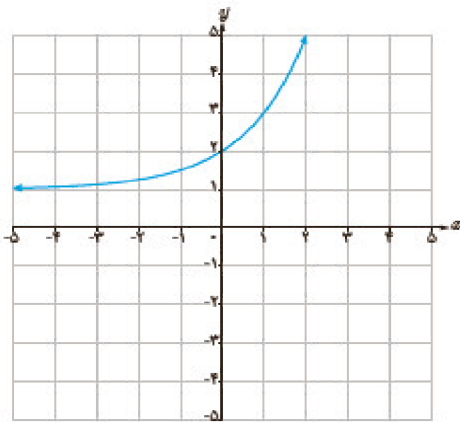
x	۱	۱۰
y	۰	۱

۴۸- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 4^x - 1$ را در بازه‌ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

« پاسخ »



x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	3	15



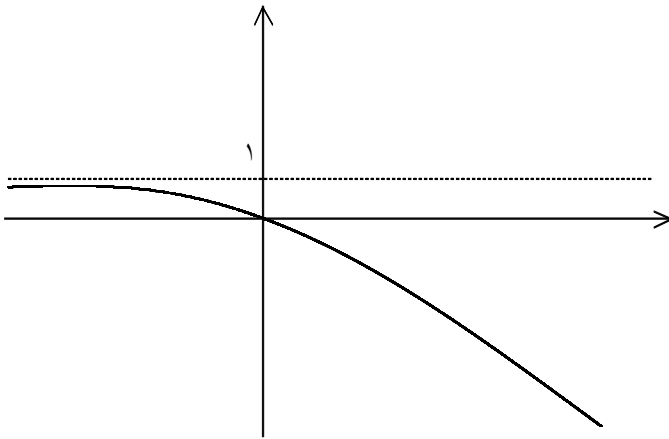
۴۹- در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &\Rightarrow a + 2^{-b} = 2 \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} a + 2^{2-b} = 5 \Rightarrow a + 2^{2-b} - a - 2^{-b} = 5 - 2 \\ \Rightarrow 2^{2-b} - 2^{-b} &= 3 \Rightarrow 2^{-b}(4 - 1) = 3 \Rightarrow 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = 2^0 \Rightarrow -b = 0, b = 0 \\ a + 2^0 &= 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0 \end{aligned}$$

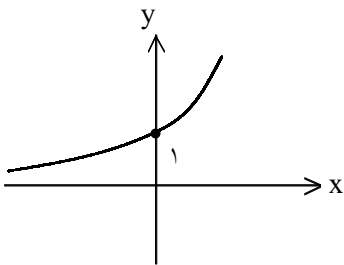
۵۰- نمودار تابع $f(x) = -3^x + 1$ را رسم کنید.

« پاسخ »



۵۱- نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را رسم کنید و دامنه و برد آنرا بنویسید.

« پاسخ »



$$f(x) = 2^x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (0, +\infty)$$

۵۲- الف) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1.24}$ را حل کنید.

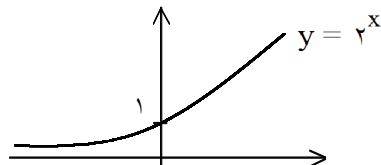
ب) نمودار تابع $y = 2^x - 1$ و $y = 2^{x-1}$ را به کمک نمودار $y = 2^x$ رسم کنید.

« پاسخ »

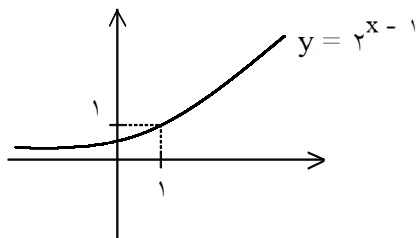
$$2^{4x-2} > \frac{1}{2^{1.0}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-1.0} \Rightarrow 4x - 2 > -1.0$$

الف)

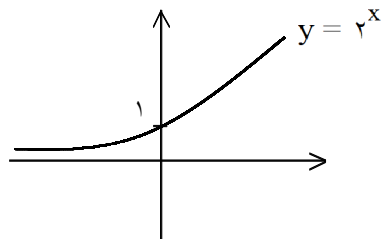
$$4x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$$



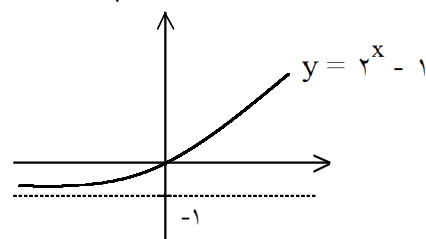
$\Rightarrow$



ب)



$\Rightarrow$



۵۳- الف) در تابع $f(x) = \log_2 x^6$

الف) دامنه تابع را حساب کنید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

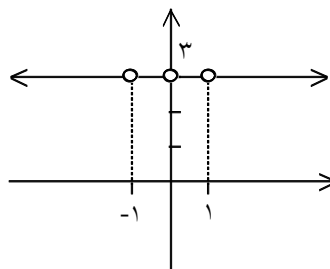
« پاسخ »

$$\begin{cases} x^6 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

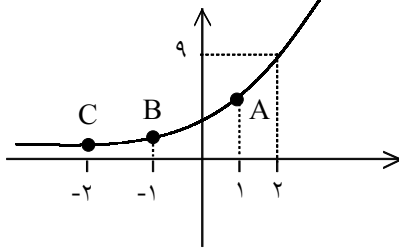
الف)

ب)

$$f(x) = \frac{6}{2} \log_2 x = 3$$



۵۴- نمودار زیر متعلق به تابع نمایی $y = a^x$ است. مختصات نقاط A و B و C را حساب کنید.



« پاسخ »

ابتدا نقطه‌ی (۲, ۹) را درون ضابطه تابع قرار می‌دهیم تا a به دست آید.

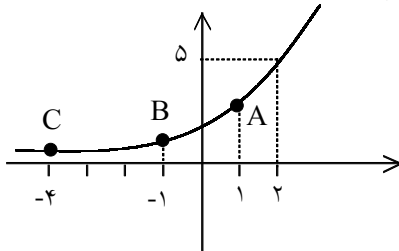
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow y = 3^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3^1 = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow C\left(-2, \frac{1}{9}\right)$$

۵۵- نمودار زیر متعلق به تابع نمایی $y = a^x$ است. مختصات نقاط A و B و C را حساب کنید.



« پاسخ »

ابتدا نقطه‌ی (۲, ۵) را درون ضابطه تابع قرار می‌دهیم تا a به دست آید.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{5} \Rightarrow y = (\sqrt{5})^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^1 = \sqrt{5} \Rightarrow A(1, \sqrt{5})$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow B\left(-1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$x = -4 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^{-4} = \frac{1}{25} \Rightarrow C\left(-4, \frac{1}{25}\right)$$

۵۶- اگر انرژی آزاد شده حاصل از یک زلزله 10^{21} Erg $2/6 \times 10^{21}$ باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.
($\text{Log } 2/6 = 0/4$)

« پاسخ »

$$E = 2/6 \times 10^{21} \xrightarrow{\text{Log } 2/6 = 0/4 \Rightarrow 2/6 = 10^{0/4}} E = 10^{0/4} \times 10^{21} \Rightarrow E = 10^{21/4} \text{ Erg}$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^{21/4} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 21/4 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 1/5 M = 9/6 \Rightarrow M = \frac{9/6}{1/5} = 6/4$$

۵۷- زلزله‌ای به بزرگی $5/9$ ریشتر در 30 کیلومتری شهر کاکلی استان بوشهر در صبح پنج‌شنبه 30 فروردین به وقوع پیوست. انرژی آزاد شده برحسب ارگ را حساب کنید. ($\text{Log } 4/5 = 0/65$)

« پاسخ »

$$M = 5/9$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 1/5 (5/9) \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 1/9$$

$$\Rightarrow \text{Log } E = 20/65 \Rightarrow E = 10^{20/65} = 10^{0/65} \times 10^{20} \xrightarrow{\text{Log } 4/5 = 0/65 \Rightarrow 4/5 = 10^{0/65}} E = 4/5 \times 10^{20}$$

۵۸- اگر انرژی آزاد شده یک زلزله 10^{20} Erg $6/4 \times 10^{20}$ باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.
($\text{Log } 2 = 0/3$)

« پاسخ »

$$E = 6/4 \times 10^{20} = 64 \times 10^{19} = 2^6 \times 10^{19} \xrightarrow{\text{Log } 2 = 0/3 \Rightarrow 2 = 10^{0/3}} E = (10^{0/3})^6 \times 10^{19} = 10^{20/8}$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^{20/8} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 20/8 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 1/5 M = 9 \Rightarrow M = 6$$

۵۹- زلزله‌ای به شدت $7/6$ ریشتر در 20 سپتامبر 1999 در شهر نانتو تایوان اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ($\text{Log } 2 = 0/3$)

« پاسخ »

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M$$

$$M = 7/6 \xrightarrow{\quad} \text{Log } E = 11/8 + 1/5 (7/6) \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 11/4 \Rightarrow \text{Log } E = 23/2$$

$$\Rightarrow E = (2)^4 \times 10^{22} \text{ Erg} = 16 \times 10^{22} \text{ Erg} = 1/6 \times 10^{23} \text{ Erg}$$

۶۰- زلزله‌ای به شدت ۸/۸ ریشتر در ۳۱ ژانویه ۱۹۰۶ در شهر اکوادور در کلمبیا اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟

« پاسخ »

$$\text{Log} E = 11/8 + 1/5 M$$

$$\xrightarrow{M = 8/8} \text{Log} E = 11/8 + 1/5 (8/8) \Rightarrow \text{Log} E = 11/8 + 13/2 \Rightarrow \text{Log} E = 25 \\ \Rightarrow E = 10^{25} \text{Erg}$$

۶۱- جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. مشخص کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۲۵۰۰ گرم می‌شود؟ ($\text{Log} 2 \simeq 0/3$)

« پاسخ »

$$m(t) = 2^t \Rightarrow 2^t = 2500 \Rightarrow t = \text{Log}_2 2500$$

$$t = \frac{\text{Log} 2500}{\text{Log} 2} = \frac{\text{Log} 100 + \text{Log} 5^2}{\text{Log} 2} = \frac{2 + 2 \text{Log} \frac{10}{2}}{\text{Log} 2} = \frac{2 + 2(\text{Log} 10 - \text{Log} 2)}{\text{Log} 2} \\ = \frac{2 + 2(1 - 0/3)}{0/3} = 11/33$$

۶۲- انرژی آزاد شده یک زلزله $2 \times 10^{19} \text{Erg}$ است. شدت این زلزله چند ریشتر می‌باشد؟ ($\text{Log} 2 = 0/3$)

« پاسخ »

$$E = 2 \times 10^{19} \text{Erg}$$

$$M = ?$$

$$\text{Log} 2 \times 10^{19} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log} 2 + \text{Log} 10^{19} = 11/8 + 1/5 M \\ \Rightarrow 0/3 + 19 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 1/5 M = 7/5 \Rightarrow M = 5$$

شدت زلزله ۵ ریشتر است.